I. INTRODUZIONE.

Spesso, si fa riferimento a teorie, strutture e relazioni matematiche senza sapere quando, come e perché siano state inventate.

Si può affermare che le invenzioni matematiche sono generalmente contestuali al periodo sociale, storico ed economico in cui si sviluppano.

Esempio:

- A iniziare dal 1500, dopo la scoperta delle Americhe, a causa dello sviluppo dei viaggi transoceanici, a scopo di scoperta e conquista di nuove terre, e successivamente di intensi scambi commerciali, crebbe la necessità di calcolare accuratamente le rotte delle navi e di "fare il punto" (determinare la posizione). Ciò avveniva osservando le stelle. Di qui la necessità di misure astronomiche accurate e di conseguenti complessi e lunghi calcoli di trigonometria.
- Lo stesso inventore del metodo scientifico moderno, Galileo Galilei, insegnava a Pisa ai futuri medici, in quanto uno dei fondamentali metodi diagnostici era legato all'astrologia (!) e quindi necessitava di buona conoscenza dell'astronomia, funzionalmente alla conoscenza delle posizioni e dei moti di stelle e pianeti.

La necessità di velocizzare i calcoli portò alla più grande invenzione aritmetica del tempo:

I ***LOGARITMI*** (fine 1500 – inizio 1600): sono stati inventati dallo scozzese Nepero (John Neper) e dallo svizzero Joos Bürgi, al fine di sveltire i calcoli; infatti, attraverso i logaritmi, i prodotti diventano somme, le divisioni diventano differenze, ecc. Ciò permise di stilare delle apposite tavole numeriche (il primo fu Briggs, che introdusse anche i logaritmi decimali) e successivamente il *regolo calcolatore*, veloce strumento di calcolo basato sulle proprietà dei logaritmi e usato correntemente fino al decennio 1970-80, quando fu soppiantato dalle moderne calcolatrici elettroniche.

****

La matematica è il migliore strumento per **descrivere, interpretare**, **prevedere** la realtà, e quindi **modificarla**, per costruire tecnologie.

Il modello matematico dà *linguaggio* al modello fisico

.La matematica nasce dall'ingegno umano. E' un grande **"*gioco*",** costituito da "pezzi" e da una scelta di "*regole del gioco*" coerenti e "utili", che determinino le "mosse" e le strategie possibili. Gioco non solo fine a se stesso, ma capace di simulare la realtà fenomenica, diventando uno specchio del mondo fisico.

Postulato generale per la costruzione del sapere scientifico:

> Esiste un mondo reale, ordinato e "razionale", cioè interpretabile secondo leggi generali.

E' necessario trovare un linguaggio adeguato, con una propria grammatica ed una propria sintassi, che permetta di dare una **rappresentazione *quantitativa*** non solo qualitativa ed intuitiva.**dei fenomeni fisici**, cioè delle leggi che li descrivono e "spiegano",

Tale linguaggio è la *matematica*, che rappresenta e simula il mondo fisico.

- **COME FUNZIONA IL PASSAGGIO DAL PROBLEMA AL MODELLO MATEMATICO?**

Una volta ipotizzato come avviene il fenomeno fisico (meccanismo d'azione), lo si "traduce" in un **modello matematico**.

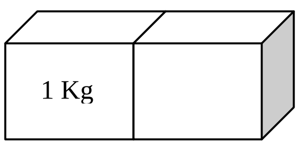
Esempio: (l'esempio è elementare e non implica meccanismi d'azione. Se sostituissimo a "peso" la grandezza "volume", la struttura del problema sarebbe la stessa)

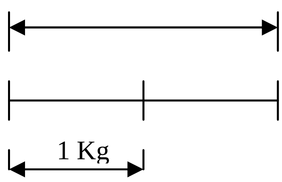
"*Un mattone pesa 1 Kg più 1/2 mattone. Quanto pesa 1 mattone*?"

Si possono costruire due modelli dello stesso problema:

1) un **modello geometrico-aritmetico**;
2) un **modello algebrico** rappresentato in termini di equazione.

1) Consideriamo il primo modello, così rappresentabile dal **punto di vista grafico**:





1 Kg + ½ mattone

Ragionando sulla rappresentazione lineare, il mattone pesa 2 Kg.

2) Il secondo modello è traducibile attraverso la seguente **equazione algebrica**:
Denotando con x il peso del mattone:

$$x = 1 + \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{x}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{[Kg]}$$

Il primo modello è impiegabile quando si ha a che fare con numeri semplici, mentre il secondo è applicabile a tutti i problemi dello stesso tipo, ossia, nell'ambito specifico è *generale*. Inoltre si avvale di *regole di calcolo* ben codificate (desunte dalle regole calcolo letterale e dai principi di equivalenza delle equazioni) per giungere alla soluzione.
Esistono vari livelli di modelli matematici, in relazione alla tipologia di problemi, ma lo **scopo** è sempre lo stesso: **risolvere i problemi** nella maniera più facile ed economica possibile, a partire da fondamenti che diano la certezza delle soluzioni.

2.- LA MATEMATICA: EXCURSUS STORICO-EPISTEMOLOGICO

Il termine **MATEMATICA** deriva dal greco "*mathematikè (techne)*" = "arte di apprendere" (dal verbo *manthainein* = "imparare".

CHE COS'È LA MATEMATICA?

La risposta è complessa; si può interlocutoriamente far passare attraverso le ulteriori seguenti domande:

- **E' una costruzione mentale autoreferenziale**?
  (sì, inventata dall'uomo secondo principi e regole arbitrari, anche se suggeriti dall'intuizione, dall'esperienza, dalla necessità di un linguaggio-strumento della conoscenza scientifica).
-
- **E' un linguaggio**?
  (sì; è il linguaggio specifico della scienza sperimentale)

- **E' un gioco**?
  (sì; ne ha la struttura).

- **E' uno strumento**?
  (sì). (Per cosa? Per descrivere, classificare e interpretare il mondo fisico e molte attività umane, e relativamente ad essi prevedere, progettare, costruire)

- **E' un modello?**
  (Sì, per *rappresentare* il mondo fenomenico e le leggi che lo regolano).

COM'È NATA LA MATEMATICA?

E' nata dal contributo di pensiero e scoperta di grandi civiltà: *Sumera*, *Assiro-Babilonese*, *Egiziana*, *Indiana* (il cui merito è quello di avere introdotto lo

Zero). I Babilonesi, gli Egizi e gli Indiani conoscevano le relazioni legate a triangoli rettangoli, i cui lati erano in relazione pitagorica.

La civiltà a cui si deve la nascita della matematica in senso moderno è quella *Greca*, la quale studiò numeri, forme e figure geometriche, in precedenza trattati empiricamente, nell'ambito di sistemi *razionali.*

La Grecia antica, nel periodo ellenistico (III – IV secolo a.C.), fu la culla del moderno pensiero matematico. Infatti, dalle conoscenze matematiche empiriche (i Babilonesi conoscevano i triangoli come relazione fra angoli; non si conosceva il teorema di Pitagora: lo stesso Pitagora ha scoperto la relazione fra i triangoli rettangoli, senza che questa fosse suffragata da un *teorema*) e dai relativi strumenti di calcolo ereditati dagli Assiro-Babilonesi e dagli Egizi. Nella Grecia antica, dal V al III secolo a.C. si giunse, attraverso una lunga riflessione sul mondo delle idee e del pensiero razionale, a fondare una **scienza matematica** essenzialmente rivolta agli oggetti geometrici astratti, che si fondava sul **metodo ipotetico–deduttivo**, sostenuto dai principi della logica formale che ne erano alla base.

I concetti alla base della matematica si possono individuare in:

1) **ASTRAZIONE**: condurre ad un'idea generale partendo dalla percezione di caratteristiche comuni a cose diverse (concetto astratto di qualcosa).

2) **DIMOSTRAZIONE**: giungere a conclusioni certe a partire da premesse, attraverso argomentazioni rigorose e ineccepibili dal punto di vista logico.

Al concetto di astrazione è correlato il concetto di *generalizzazione*, che consiste nel trovare proprietà e "regole" che valgono per la maggior vastità possibile di oggetti.

Ad esempio, la generalizzazione del concetto di numero NATURALE porta al concetto di numero RAZIONALE, e ulteriormente a quello di numero REALE e quindi di numero COMPLESSO. Ciascuna struttura numerica in qualche modo "ingloba" la precedente (mediante gli *isomorfismi* tra strutture, vedi Lez.3^)

L'uso di enti astratti della geometria per la descrizione del mondo reale inserito in un sistema autoconsistente, consente di definire il *sistema assiomatico* della geometria euclidea e porta alla possibilità di distinguere tra il mondo fisico e le sue rappresentazioni matematiche, aprendo la strada, di fatto, al concetto di MODELLO MATEMATICO.

La matematica in senso moderno è intesa come *studio delle relazioni e delle operazioni logiche conseguenti su di esse*.

"*I Matematici non studiano oggetti, ma relazioni tra oggetti. Così essi sono liberi di sostituire alcuni oggetti con altri finché le relazioni rimangono inalterate. Il loro contenuto è irrilevante: è solo la loro forma che interessa*". Henry Poincaré (1854-1912)

Il pensiero matematico

- GLI ANTICHI

I matematici greci dell'età classica provenivano principalmente da coste e da isole della odierna *Turchia*, zone teatro di scambi sia commerciali che culturali, che favorivano la dinamica e la diffusione del pensiero.

Il primo matematico è il leggendario **TALETE di Mileto** (624–547 a.C.). Egli consente il passaggio della matematica Assiro-Babilonese ed Egizia, ossia empirica (pratica), alla matematica come SCIENZA, cioè al mondo astratto, formale, dialettico. Famoso è, ad esempio, il calcolo dell'altezza della piramide di Cheope senza salirvici, sfruttando le proprietà di similitudine di triangoli.

Seguono:

- **PITAGORA di Samo** (569–475 a.C.; Samo è un'isola greca vicino all'attuale Turchia), per il quale "*tutto è (numero) razionale*", cioè rapporto tra numeri interi.

  Questa concezione fu messa in crisi dalla scoperta delle *grandezze incommensurabili*, il cui rapporto non può essere espresso da numeri razionali, cioè da rapporti tra numeri interi (frazioni), come ad es. (ma gli esempi possono essere infiniti) diagonale e lato di un quadrato (rapporto = $\sqrt{2}$) , lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro (rapporto = π = 3,1416…)).

- **EUCLIDE di Alessandria** (325-265 a.C.), per il quale la geometria è intesa come un *sistema assiomatico*, fondato sul metodo ipotetico–deduttivo. Egli ha fondato la geometria nel senso moderno el termine, sistematizzando e costruendo un nuovo modo di pensare la matematica.

- **ARCHIMEDE di Siracusa** (287–221 a.C.). Matematico, Fisico, Ingegnere, fu il primo a precorrere il calcolo integrale, (ad es. calcolando l'area sottesa da un arco di parabola), e a calcolare il valore di π. Il suo *metodo di esaustione*, per dimostrare e calcolare nell'ambito di complessi problemi geometrici, fece scuola fino al XVII secolo. Di Archimede si ricordano anche le sue esperienze su leve, specchi ustori, ecc. e i suoi famosi studi di idrostatica (legge di Archimede sulla "spinta" sui corpi solidi in un fluido).

- **APOLLONIO da PERGA** (262–190 a.C.; Perga è in una zona dell'attuale Turchia). Egli scoprì e studiò le sezioni coniche (circolo, ellissi, parabola, iperbole).

I romani, grandi ingegneri e applicatori dei modelli matematici, non "inventarono" nulla in campo matematico, ma si servirono dei greci (per lo più liberti) per apprenderla ed applicarla.

La matematica degli antichi greci giunse in Europa attraverso gli *Arabi* ed i *Persiani*.

Gli Arabi ed i Persiani furono i fondatori dell'*ALGEBRA*, specie grazie al persiano **AL KHWARIZMI** (780–850 d.C.), dal cui nome deriva il termine *algoritmo*, inteso come "procedura di calcolo".

Un altro grande algebrista fu **OMAR KHAYYAM** (1048–1131 d.C.), il più grande poeta persiano del tempo, il quale affrontò in modo sistematico lo studio delle equazioni.

- **LA MATEMATICA "CLASSICA"**

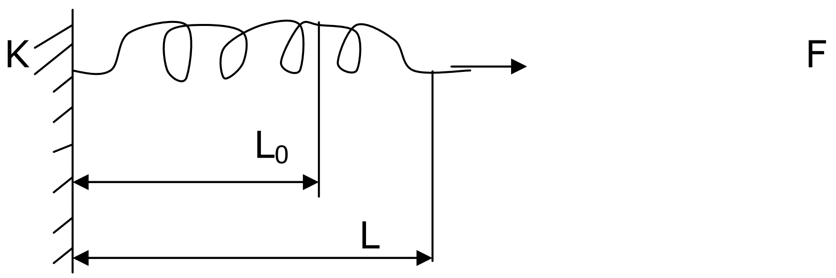
Si sviluppa fino alla metà dell'ottocento.

La matematica classica fino al 1600 si può distinguere in:

- ARITMETICA, scienza dei numeri, che implica il contare, l'operare, il calcolare;
- GEOMETRIA, scienza delle figure geometriche;
- ALGEBRA, scienza della generalizzazione astratta. Questa parte della matematica esprime un notevole salto di qualità; infatti, dal calcolo fra i numeri si passa al calcolo letterale e alle equazioni, cioè si generalizza. Ciò ha permesso di generalizzare numerose leggi fisiche e matematiche.

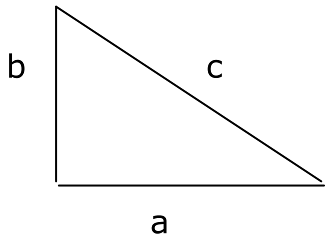
Esempi:

1) deformazione elastica delle molle $\Delta L = k F$, dove $\Delta L = L - L_0$



Questa relazione letterale esprime validità per tutte le molle, in relazione alla loro costante elastica k e alla forza applicata F. L'azione della forza, a seconda dei casi, determinerà un opportuno allungamento della molla (la variazione di lunghezza ΔL è data come differenza fra allungamento totale la lunghezza della molla soggetta alla forza F e la sua lunghezza a riposo (L_0).

2) relazione pitagorica sui triangoli rettangoli $a^2 + b^2 = c^2$,



diviene espressione generale, ossia applicabile a *tutti* i triangoli rettangoli.

Rimanendo legati al tema dell'algebra, Philippe SHNOEBELEN afferma che:
"I simboli algebrici sono usati quando non si sa di cosa si sta parlando".

Ad esempio, data un'equazione di secondo grado $a x^2 + b x + c = 0$ le sue radici, cioè i valori di x che soddisfano l'equazione, sono date da:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si esprimono qui le soluzioni *generali* dell'equazione di secondo grado, valida per *qualsiasi* valore numerico dei coefficienti a, b, c.
Anche gli Assiri-babilonesi, gli Egizi e i Greci antichi sapevano risolvere *alcuni tipi* di equazioni di secondo grado (per via geometrica), ma non avevano nessuna idea della possibilità di un metodo *generale* di risoluzione.

→ Non interessano tanto i simboli (nomi o rappresentazione grafica) , quanto le loro proprietà e quindi le regole con cui manipolarli.

Tra i più grandi algebristi classici:
Luca ***PACIOLI*** (1445-1517); *Scipione* ***DAL FERRO*** *(1465-1526)*; *Lodovico* ***FERRARI***; *(1522-1565); Rafael* ***BOMBELLI*** *(1526-1572); Girolamo* ***CARDANO*** *(1501-1576); Nicolò* ***FONTANA***, detto "***Tartaglia***" (1499-1557); *François.* ***VIÈTE*** *(1540-1603)*; Jean Le Rond **D'ALEMBERT** (1717-1783), matematico e filosofo; enciclopedista, uno dei fondatori dell'Illuminismo francese (con Voltaire e Diderot); *Paolo* ***RUFFINI*** (1765-1822).

L' **Analisi matematica**

Nella seconda metà del seicento si assiste ad una delle più grandi rivoluzioni della matematica dopo Euclide: si introducono il *calcolo differenziale ed integrale* o *calcolo infinitesimale* (oggi ANALISI MATEMATICA), strettamente legato ai concetti di *infinitesimo* e di *infinito*.

Cominciano ad apparire i concetti di *funzione*, *limite*, *derivata*, *integrale*, *equazione differenziale*.
Da ricordare, agli inizi del '600, la tappa fondamentale precedente: la fondazione della **Geometria analitica**, ad opera di René Descartes (Cartesio) e Pierre de Fermat, il più grande dei matematici "dilettanti" (intendendo col termine *dilettanti* non i "matematici della domenica", ma coloro che, pur occupandosi di matematica ad altissimo livello, non lo facevano per professione, ma per interesse personale, cosa assai frequente a quel tempo.(Fermat era di professione magistrato raggiunse le più alte cariche; Cartesio seguì per ven'anni la carriera militare).

La *geometria analitica coniuga l'algebra e le geometria*: i punti sul piano (cartesiano; poi esteso allo spazio tridimensionale) sono rappresentati da coppie ordinate di numeri, le distanze tra essi da una relazione pitagorica (espressa algebricamente). In tal modo le più importanti curve sul piano (retta, iperbole, parabola, ellissi, circolo; logaritmica, esponenziale e moltissime – infinite- altre) si rappresentano mediante equazioni algebriche (più recisamente mediante le loro soluzioni) a due incognite (variabili); alle proprietà delle curve corrispondono proprietà delle relative equazioni e viceversa. Enti geometrici e loro proprietà si possono rappresentare ("tradurre") in termini algebrici (più facili da manipolare e più potenti) e le equazioni algebriche sono suscettibili di rappresentazione grafica (di più intuitiva e immediata interpretazione).

Si giunge così al concetto di *funzione* e della sua *rappresentazione grafica*, premessa necessaria alla nascita del calcolo infinitesimale.

Il *calcolo infinitesimale* nacque dalla necessità dei fisici dell'epoca di risolvere problemi inediti, posti da una più complessa idea dell'universo e delle leggi fisiche, accompagnata da misure molto più accurate. Si ponevano ad es. i problemi di calcolare la velocità e l'accelerazione istantanee dei moti NON LINEARI, come per le traiettorie ellittiche dei pianeti, o il LAVORO di una FORZA NON COSTANTE, impossibili da risolvere con gli strumenti dell'algebra.elementare.

La prima pubblicazione di ANALISI MATEMATICA si deve a **Isaac NEWTON** (1643 – 1727), il quale, dopo aver intuito e postulato la *legge di gravitazione universale* e le *leggi fondamentali della meccanica* inventò il calcolo infinitesimale.
Contemporaneamente, il filosofo tedesco **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ** (1646 – 1716), partendo da considerazioni diverse, arriva alla stessa scoperta. Le invenzioni sono indipendenti, ma i concetti chiave i medesimi, come la nozione di limite, di infinitesimo, cioè di una quantità piccola a piacere, tendente a zero, ma non nulla ("un attimo prima di cadere nel baratro dello zero" come diceva lo stesso Newton), di integrale e della geniale scoperta della correlazione tra *derivata* e *integrale.*

Si ricordano come precursori del calcolo infinitesimale:

- Bonaventura **CAVALIERI** (1598-1647)
- Evangelista **TORRICELLI** (1608 – 1647)
- Pierre De **FERMAT** (1601 – 1665)
- Isaac **BARROW** (1630 – 1677)

L'opera di Newton e Leibniz ebbe sviluppi importantissimi per tutti i secoli successivi.

Ricordiamo alcuni dei nomi più rilevanti:

- Guillaume (Marchese) **De L'HOSPITAL** (1661 – 1704)
- Leonard. **EULER** (1707 – 1783) (noto in Italia come EULERO). Egli era, oltre che il più prolifico e geniale matematico del suo tempo, un "calcolatore umano£, anche perché molta parte della sua vita fu flagellata dalla cecità.
- Johann Carl Friedrich **GAUSS** (1777 – 1855), detto *"principe dei matematici"*. Si occupò di quasi tutti i rami della matematica, della fisica e della cosmologia del tempo. I suoi studi condussero anche all'introduzione delle *geometrie non euclidee*..
- Joseph-Louis **LAGRANGE** (1736 – 1813); con le sue intuizioni fornì i primi strumenti sofisticati dell'analisi matematica.
- Augustin Louis **CAUCHY** (1789 – 1857). A lui si deve tra l'altro la piena comprensione e la rigorosa defінzione del concetto cardine di tutta l'analisi: quello di *limite.*
- Johann Peter Gustav Lejeune **DIRICHLET** (1805 – 1859)
- Georg Friedrich Bernhard **RIEMANN** (1826 – 1866)
- Karl Theodor Wilhelm **WEIERSTRASS** (1815 – 1897), il quale ebbe anche il merito di aver sostenuto una delle prime donne matematiche (Sonia Kovalevskaija).
- Julius Wihelm Richard **DEDEKIND** (1831-1916)

- **AI CONFINI DELLA MATEMATICA CLASSICA**

Le geometrie non euclidee.

E' nota la storia degli tentativi di dimostrare il quinto postulato ("*dato un punto esterno a una retta data, per esso passa una ed una sola parallela alla retta data*") a partire dagli altri, e come questo si sia rivelato vano finchè Gauss, Lobatchevskji, Bolyai e Riemann, nella prima metà dell'ottocento, sono giunti alla conclusione che era un postulato indipendente dagli altri e non in contraddizione con essi: da qui, lasciando inalterati gli altri assiomi, e postulando (contro il senso comune!) che per un punto potessero passare infinite parallele a una retta data, oppure nessuna, furono costruite altre geometrie (dette rispettivamente *iperbolica* e *sferica*), ugualmente coerenti. In tali geometrie alcune proprietà delle figure geometriche risultavano "strane" e in contrasto con l'intuizione dettata dall'esperienza comune.

Qual è dunque la geometria "vera"? Il profano è tentato di dire che la geometria di Euclide è l'unica "realmente vera" , mentre le altre sono solo giochi
intellettuali da matematici puri (che notoriamente "hanno la testa tra le nuvole e mancano di senso della realtà").

Ma qualsiasi sistema assiomatico (come è la geometria) è "vero" se è ***compatibile*** (cioè non contiene proposizioni contraddittorie) e le geometrie non-euclidee rispondono a questi requisiti.

Quindi le geometrie sono tutte ugualmente "vere", l'euclidea e le non euclidee.

Il profano confonde generalmente la "verità" (consistenza) di un sistema, con la sua "utilità", cioè con la corrispondenza tra il modello matematico e la realtà fenomenica di cui ha esperienza.

Le geometrie non-euclidee si sono rivelate, quasi un secolo dopo la loro scoperta, le geometrie più consone a descrivere non lo spazio limitato della nostra esperienza, ma la struttura dello spazio cosmico (Teoria della relatività generale di Einstein, 1921). Ma già la Teoria della relatività ristretta (1905) , che ha sconvolto la concezione classica (newtoniana) e kantiana dello spazio e del tempo, ha usato una geometria in cui lo spazio è a quattro dimensioni e dove la quarta dimensione è rappresentata non da numeri reali, ma immaginari., quindi ben al di là del potere di rappresentazione suggerito dall'esperienza.

L' **Algebra lineare**: *sistemi lineari, spazi vettoriali, algebra delle matrici*

E' nata come teoria dei ***sistemi di equazioni lineari*** (equazioni di primo grado a n incognite). Le soluzioni di tali sistemi, ove esistano, sono n-ple (ennuple: insieme ordinato di n oggetti) di numeri, riconoscibili anche come ***vettori*** nello spazio a n dimensioni (i vettori dello spazio tridimensionale sono rappresentabili sia da segmenti orientati – rappresentazione geometrica – che, equivalentemente, da terne ordinate di numeri – rappresentazione algebrica. Insiemi ordinati di più di tre numeri sono ancora vettori – previa definizione di operazioni su di essi – ma non più rappresentabili geometricamente. Sono vettori di spazi astratti a più di tre dimensioni).

Allo studio dei sistemi lineari si rivelò funzionale non solo il concetto di vettore, ma anche a quello di ***matrice*** (tabella di elementi, rettangolare o quadrata).

Si sviluppò quindi un'algebra dei vettori e un'algebra delle matrici e algebre su insieme di oggetti "strani" (come ad es. i quaternioni di Hamilton) e teorie sempre più generali e astratte sugli spazi vettoriali, non solo come n-ple finite di numeri reali (*spazi euclidei*) o complessi (*spazi hermitiani*), ma anche come n-ple infinite (*spazi pre-hilbertiani*) o enti astratti non più legati ai numeri (*spazi di Hilbert, di Banach*, ecc.).

Tra i più grandi matematici dell'algebra lineare:
- Gabriel **CRAMER** (1704-1752)
- Bernard **BOLZANO** (Praga, 1704-1752)
- Sir William Rowan **HAMILTON** (1805-1865)
- Hermann Günter **GRASSMANN** (1809-1877)
- Charles **HERMITE** (1822-1901)
- James Joseph **SYLVESTER** (1814-1897) e Arthur **CAYLEY** (1821-1895)
- Giuseppe **PEANO** (1858-1932)
- Stefan **BANACH** (1892 – 1945)
- David **HILBERT** (1862 – 1943)

La **Topologia**

(dal greco *topos* = LUOGO, e *logos* = DISCORSO, TRATTATO) è una branca della matematica nata come studio di proprietà qualitative degli spazi, indipendentemente dalle dimensioni e dalle misure.
Queste stesse proprietà non devono variare quando le figure vengono deformate senza strapparle né forarle oppure nel caso se ne sottraggano dei pezzi.

La topologia*: esempi*

- i ponti di KONIGSBERG di EULERO (Fig.1) - Leonhard **Euler** (1707 – 1783)
- il nastro di MÖBIUS (Fig.2) - August Ferdinand **Möbius** (1790 – 1868)
- la bottiglia di KLEIN (Fig.3) - Felix Christian **Klein** (1849 – 1925)

Altri importanti matematici topologi (che NON studiano la vita dei topi…), oltre a molti dei già citati che si sono occupati di algebra lineare, furono:

- Henry **POINCARE'** (1854 – 1912)
- Felix **HAUSDORFF** (1868 – 1942)
- Stefan **BANACH** (1892 – 1945)
- Luitzen Egbertus Jan **BROUWER** (1881 – 1966)

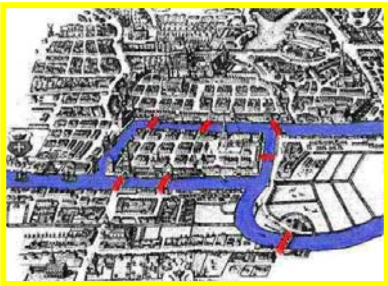
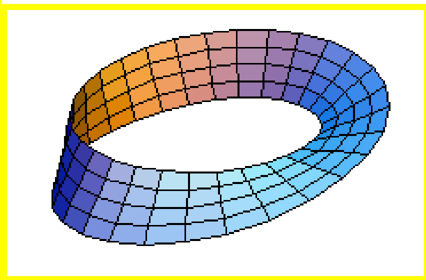
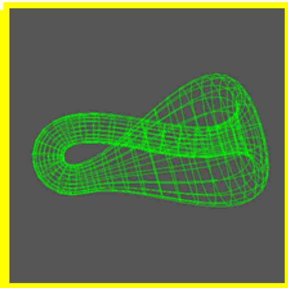




Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

III – GLI INSIEMI

- **LA MATEMATICA "MODERNA" - PREMESSA**

Verso la seconda metà dell'ottocento (1860-80) nasce la *matematica moderna*, come sviluppo, ma anche soprattutto critica dei fondamenti della matematica classica.
L'800 è il secolo della sistematizzazione rigorosa e dell'approfondimento, della definizione astratta e linguisticamente ineccepibile di concetti fondamentali, delle dimostrazioni rigorose di proprietà anche note precedentemente, ma non dimostrate da rigorosi teoremi generali, che esigevano fondamenti solidi. E' anche il secolo dell'invenzione di nuove matematiche (algebra lineare, teoria dei gruppi, topologia, ecc.), anche se notevoli opere precorritrici erano già apparse nel secolo precedente. In tale secolo si assiste allo sviluppo, su basi rigorose, dei concetti e degli algoritmi avanzati del *calcolo differenziale e integrale (analisi matematica)*, la più grande invenzione matematica di tutti i tempi dopo la geometria di Euclide (ad opera di Newton e Leibniz, nella seconda metà del '600). Fondamentali furono i concetti di *limite* e di *numero reale*, Molti i nomi dei grandi matematici che contribuirono allo straordinario sviluppo dell'Analisi matematica, tra i quali Gauss, Lagrange, Cauchy, Riemann, Dedekind, Weiestrass, Bolzano…
Anche in questo caso, ciò è legato alle necessità scientifiche e tecnologiche della società civile: è il secolo dell'industrializzazione avanzata, dell'invenzione delle *macchine* (quindi necessità di modelli matematici adeguati per la Termodinamica, la Meccanica, L'Elettromagnetismo).

Nella seconda metà del secolo furono affrontati due problemi che si rivelarono cruciali dal punto di vista dei fondamenti della matematica:

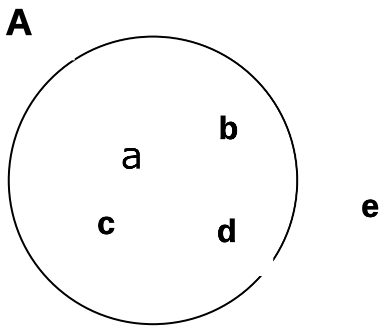
A. Il problema degli insiemi**, in quanto gli insiemi, concepiti "ingenuamente" come semplici collezioni, risultavano spesso mal definiti e portavano a paradossi;**

B. Il problema della continuità**, legato al concetto di numero reale.**

Ne riparleremo in seguito.

Nota: Il ***concetto di insieme*** è piuttosto complesso; si consideri tale concetto nella sua accezione più semplice, ossia insieme inteso come *classe* o come *raggruppamento di oggetti*, chiamati *elementi*.

I diagrammi di VENN consentono di caratterizzare simbolicamente gli insiemi attraverso figure chiuse, che sono i contenitori al cui interno si collocano gli elementi che appartengono all'insieme stesso:



a, b, c, d, sono elementi che appartengono all'insieme A,
mentre **e** non appartiene all'insieme A.

Simbolicamente, lo si può scrivere in questo modo:

$a \in A$, $b \in A$ … e $e \notin A$.

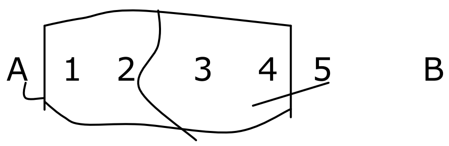
Ci sono casi in cui gli elementi costituenti l'insieme si possono *ELENCARE*, perché in numero finito, e casi in cui il numero di elementi è talmente elevato, o al limite infinito, che non si può procedere per elencazione.
E' necessario definire bene un insieme, cioè fissare un criterio o regola o legge per poter stabilire se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme.
Un insieme può essere definito in:

1) **MODO ANALITICO**, quando è possibile elencare gli elementi di un insieme;
2) **MODO SINTETICO**, se si stabiliscono le proprietà che caratterizzano l'appartenenza degli elementi all'insieme, senza enumerare gli elementi ad uno ad uno.

Tutti gli *insiemi finiti* si possono definire in modo *analitico*, anche se dipende dal tempo che si impiega ad elencare tutti gli elementi; perciò, se il numero di elementi è molto elevato conviene utilizzare il *metodo sintetico*.
Per quanto riguarda invece gli *insiemi infiniti*, cioè caratterizzati da un numero infinito di elementi, è possibile utilizzare solo il *metodo sintetico*.

SOTTOINSIEMI E OPERAZIONI TRA INSIEMI

Sia **A** l'insieme costituito dagli elementi: 1, 2, 3, 4, 5. Sia **B** l'insieme formato dagli elementi: 3, 4, 5.



- B È UN SOTTOINSIEME PROPRIO DI A **(**B $\subset$ A**, che si legge: "B è contenuto in A"), quando l'insieme B è tale che tutti i suoi elementi appartengono all'insieme A.**
- B È UN SOTTOINSIEME IMPROPRIO DI A **(**B $\subseteq$ A**, che si legge: "B contenuto o uguale ad A"), quando A e B coincidono, cioè B ha gli stessi elementi dell'insieme A.**

❖ *Dato un insieme A, quanti suoi sottoinsiemi è possibile formare?*

Se n è il numero di elementi dell'insieme A, si inizia dall'**INSIEME VUOTO** (insieme che non possiede alcun elemento) e si prosegue con i sottoinsiemi formati da 1, 2, 3, …n elementi e da tutte le loro possibili combinazioni. Si può verificare che il numero totale di sottoinsiemi che si può costruire è dato da 2 elevato al numero di elementi presenti nell'insieme stesso.

L'insieme di *tutti* i possibili sottoinsiemi di un insieme è detto **insieme delle parti**

Esempio:

Sia dato un insieme **A** costituito da 3 elementi. L'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi da esso deducibili è caratterizzato da un numero di elementi pari a $2^3 = 8$.
A = {1, 2, 3} rappresenta l'insieme delle parti di A.
L'insieme costituito da tutti i possibili sottoinsiemi di A è il seguente, ed è caratterizzato dagli otto elementi preventivati:

P(A) = { ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2 , 3}, {1, 2, 3}}

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme è detto **l'insieme delle parti**

Due insiemi si possono ***UNIRE***.
Dati due insiemi A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, la loro **unione** è l'insieme
A $\cup$ **B** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Le *proprietà* degli insiemi, legate all'operazione di unione sono:

1) A $\cup$ A = A (l'unione dell'insieme con se stesso dà l'insieme stesso);
2) A $\cup$ ∅ = A (l'unione dell'insieme con l'insieme vuoto dà l'insieme stesso);
3) Se B $\subset$ A ⇨ A $\cup$ B = A.

Due insiemi si possono ***INTERSECARE***.
Dati due insiemi A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {4, 5, 6, 7, 8}, l'**intersezione** è un terzo insieme caratterizzato dai soli elementi comuni ai due insiemi, quindi
A $\cap$ **B** = {4, 5}.

Le *proprietà* degli insiemi, legate all'operazione di intersezione sono:

1) A $\cap$ B = ∅ (se A è un insieme completamente distinto da B - disgiunto);

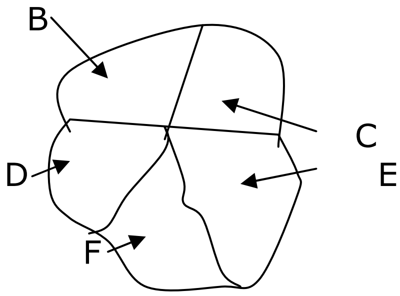
2) $A \cap A = A$.
3) $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$;

Inoltre, dato un insieme A, è possibile eseguire una ***PARTIZIONE*** dell'insieme stesso, cioè suddividerlo in sottoinsiemi

Le *proprietà* degli insiemi, determinate dall'operazione di partizione sono:

1) L'intersezione di due qualsiasi sottoinsiemi della partizione deve essere vuota;
2) L'unione di tutti i sottoinsiemi della partizione deve costituire l'insieme stesso.

Tutto questo si traduce graficamente, nel modo seguente:



Gli insiemi rappresentati costituiscono effettivamente una partizione dell'insieme A; infatti $B \cap D = \varnothing$, $C \cap E \cap F = \varnothing$ e $B \cup C \cup D \cup E \cup F = A$.

Corrispondenza biunivoca tra insiemi

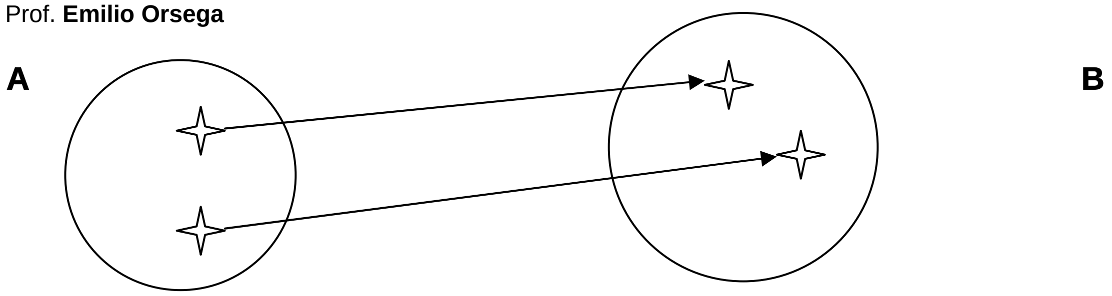
Come avrebbe potuto fare un ipotetico pastore agli albori della Storia a controllare ogni giorno il numero delle proprie bestie, quando ancora non si era imparato a *contare*, nel senso moderno?

Attraverso il concetto (allora inconsapevole) di CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA INSIEMI**..**

Le società primitive, presumibilmente, non avevano il concetto del "*contare*"; esse conoscevano l'unità, il 2, il 3, il 4 e il 5 forse, e poi il concetto di "molti". Il contare, il numerare quindi non è stato primordiale;.

Il pastore del passato, dunque, poteva ad es.creare una corrispondenza fra un gruppo di sassolini (o legnetti) e quello dei propri capi di bestiame: per ogni bestia che usciva dal ricovero, il pastore disponeva in un mucchio un sassolino, che alla sera man mano toglieva, quando ciascun animale rientrava.
Nasceva il concetto di **CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA INSIEMI**, ossia ad ogni sassolino corrispondeva una bestia, e ad ogni bestia corrispondeva un sassolino.

Più in generale, ad ogni elemento dell'insieme A è possibile associare uno ed un solo elemento dell'insieme B:



L'**INSIEME** è visto come una collezione, un raggruppamento di oggetti, detti *elementi*.
Gli elementi possono esseri concreti, ma anche astratti, e devono rispondere ad opportuni requisiti.
Un insieme, inteso come classe o collezione, è dunque un raggruppamento di elementi, in numero finito o infinito, che soddisfano a opportune regole o che hanno opportuni requisiti.
Una legge di corrispondenza biunivoca collega ogni elemento di un primo insieme ad uno ed un solo elemento del secondo insieme viceversa.
Se considero insiemi in corrispondenza biunivoca fra di loro, essi si dicono EQUIPOTENTI. Nel caso due insiemi equipotenti siano *finiti*, essi sono EQUINUMEROSI.
Se gli insiemi equipotenti sono *infiniti*, non si può a rigore parlare di numero dei loro elementi e quando si dirà che sono "equinumerosi" ci si riferirà solo al concetto intuitivo di "numerosità".
Alla base del concetto di insieme c'è l'idea di definire oggetti diversi con caratteristiche comuni (es. l'insieme di sedie comprende tutte le possibili sedie di qualsiasi forma e dimensione).

Due insiemi sono EQUIPOTENTI se è possibile associare i loro elementi con una legge (qualsiasi) di corrispondenza biunivoca.

Questo concetto rappresentarà il cardine di tutti i ragionamenti sull'infinito.

Due insiemi equipotenti sono *equivalenti*, dal punto di vista della loro "numerosità".

*****

Intermezzo: le relazioni di *Equivalenza*.

L'**equivalenza** è un concetto fondamentale in matematica, ed ha senso in quanto **relazione**.

Una **RELAZIONE SI DICE DI EQUIVALENZA** se gode delle seguenti proprietà:

1) RIFLESSIVA
2) SIMMETRICA
3) TRANSITIVA

considerando **R = relazione** (che stabilisce connessioni tra oggetti), traduco le proprietà in linguaggio simbolico:

1) a R a
2) a R b ⇔ b R a
3) a R b ∧ b R c ⇒ a R c

La relazione di equivalenza più nota è quella di *uguaglianza* (oltre a quella di *parallelismo*).

*****

Il concetto di corrispondenza tra insiemi (non necessariamente biunivoca) ha permesso a CARTESIO e a FERMAT di costruire la **GEOMETRIA ANALITICA** (1600), legando i punti di una curva sul piano (sul quale sia stato posto un sistema di riferimento di assi cartesiani) a coppie ordinate di numeri reali.
Nasce quindi il concetto di *INSIEME* dei punti di una retta, e la *CORRISPONDENZA BIUNIVOCA* tra i punti di una retta ed i numeri reali (che sono infiniti), ossia ad ogni punto di una retta orientata corrisponde uno ed un solo numero reale e, viceversa, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto della retta, il cui *punto zero* rappresenta il separatore fra i numeri reali negativi e numeri reali positivi.

IV – LE STRUTTURE ALGEBRICHE

- STRUTTURA DELLA MATEMATICA

La matematica è un *GIOCO ASTRATTO*, cioè un insieme di *RELAZIONI TRA SIMBOLI* (che, a loro volta, potrebbero significare relazioni, ottenendo "relazioni fra relazioni").

Le "regole del gioco" consentono di effettuare le "mosse", cioè, fuor di metafora, manipolare e comporre ra loro i simboli (stabilire *relazioni*, ad es. operazioni)
Si codifica così un *CALCOLO SIMBOLICO*.

Come è strutturato, nei suoi aspetti essenziali, il gioco?

La matematica è costituita da:

1) **Strutture algebriche** definite all'interno di
2) **Sistemi assiomatici**

1. Una **Struttura algebrica** è un insieme su cui si definisce una o più operazioni (tra i suoi elementi) che godono di certe proprietà. Essa può essere introdotta attraverso semplici esempi:

   supponiamo di suddividere una classe di bambini in tre squadre, che si distinguono dal colore delle maglie: una squadra avrà la maglia rossa (R), l’altra verde (V), e la terza bianca (B). Avviati all’interno di un labirinto, essi permettono la strutturazione del gioco indicato nella tabella:

	R	**V**	**B**
R	R	V	B
V	V	R	B
B	B	B	B

quando un bambino con la maglia rossa incontra un bambino con lo stesso colore di maglia vince la squadra rossa e via di seguito, secondo le regole (arbitrarie) riportate in tabella.

In questo modo ***è stata costruita una struttura algebrica***, in quanto, considerato un insieme di tre elementi (R, V, B), sono state stabilite delle *REGOLE DI COMPOSIZIONE*, di associazione, per cui dalla associazione di due elementi dell’insieme (colori) ne risulta un terzo, sempre appartenente all’insieme. Si è dunque stabilito, su questo insieme, una *OPERAZIONE INTERNA* (secondo le regole indicate dalla tabella), cioè una relazione.

Lo stesso gioco può essere realizzato considerando solo due squadre:

	R	**V**
R	R	V
V	V	R

In entrambi i casi l’operazione gode delle proprietà associativa e commutativa..

Se l’operazione è interna si dice anche che la struttura algebrica gode della PROPRIETÀ DI CHIUSURA.

Esempio:

Si consideri l’insieme di due numeri +1 e -1, e si definisca la moltiplicazione nella seguente tabella:

*	**+1**	**-1**
+1	+1	-1
-1	-1	+1

La presente struttura algebrica è FORMALMENTE identica a quella dell’esempio precedente a due elementi (R, V). Tali strutture algebriche sono **ISOMORFE**, hanno cioè la stessa forma. Cambiano solo i *nomi* (simboli) degli elementi e delle operazioni. Con linguaggio metaforico si può dire che una struttura è la traduzione” fedele dell’altra.
Allo stesso modo, la struttura a tre elementi dell’esempio precedente (R, V, B) è isomorfa alla struttura definita sull’insieme contenente i numeri (0, +1, -1)

dove sia stata definita la nota moltiplicazione tra numeri relativi ("regola dei segni").

Le strutture algebriche sono quindi costituite da:

1) Un insieme di elementi (ad es. numeri), detto *insieme sostegno*
2) Una o più operazioni (ad es. addizione e moltiplicazione) definite sull'insieme sostegno.

Le operazioni fondamentali, l'<u>*addizione*</u> (il cui risultato si chiama *somma*) e la *moltiplicazione* (il cui risultato si chiama *prodotto*; analogamente i risultati delle operazioni <u>*sottrazione*</u> e <u>*divisione*</u> si chiamano rispettivamente *differenza* e *quoziente*) godono di varie proprietà: tra cui la proprietà *commutativa* e *associativa* e la proprietà *distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma o alla differenza* (letta viceversa esprime il cosiddetto "raccoglimento a fattor comune")

L' <u>*ELEMENTO NEUTRO*</u> è quel numero (*n*) in grado di restituire il termine di partenza (Q):

$$n * Q = Q$$

L'elemento neutro dell'addizione è lo *zero*: 2 + 0 = 2
L'elemento neutro della moltiplicazione è *l'unità*: 2 x 1 = 2

Tutti gli insiemi su cui si possono definire delle operazioni interne sono *strutture algebriche*.

Gli insiemi numerici

<u>Particolari e fondamentali strutture algebriche</u> sono gli **insiemi numerici.**
Il nome *insiemi* potrebbe creare confusione: gli insiemi numerici non sono semplici insiemi, ma particolari strutture (algebriche), cioè **insiemi di numeri sui quali siano stati definite le due operazioni fondamentali di *addizione* e *moltiplicazione*** (*sottrazione* e *divisione* sono operazioni derivate, rispettivamente dalle prime due).
<u>Insiemi numerici</u>: dei *naturali*, *interi*, *razionali*, *reali*, *complessi.*

******

<u>*Interludio: sulla divisione per zero.*</u>

$\frac{a}{b} = c$ se $b * c = a$

nell'operazione di divisione si definisce <u>QUOZIENTE</u> di due numeri *a* e *b* il numero *c* che, moltiplicato per *b*, dà come risultato *a*. Infatti:

$\frac{15}{5} = 3$ perché $5 * 3 = 15$

Di conseguenza il quoziente della divisione tra un numero qualsiasi $\neq 0$ (ad esempio 5) e zero non esiste, perché qualsiasi numero moltiplicato per 0 non può dare come risultato 5, ma sempre e solo zero. Quindi:

$$\frac{5}{0} = impossibile$$

cioè questa operazione non ha significato, è <u>IMPOSSIBILE</u>, se si intende la scrittura 5/0 come operazione di divisine tra 5 e 0.

Se invece si legge come *frazione*, che rappresenta un numero razionale, esso <u>non esiste</u> e *la scrittura è priva di significato*.

Si consideri ora quale potrebbe essere il risultato della seguente divisione:

$$\frac{0}{0} = ?$$

Potrebbe essere:

$$\frac{0}{0} = 3 \qquad \text{perché} \qquad 0*3 = 0$$

Ma potrebbe anche essere:

$$\frac{0}{0} = 17{,}5 \qquad \text{perché} \qquad 0*17{,}5 = 0$$

In questo caso il quoziente esiste, ha significato. Ma potremo dire che ne ha "troppi". Infatti <u>*qualunque numero*</u> è quoziente di zero diviso zero, poiché qualunque numero moltiplicato per zero dà zero.

Si dice che la forma 0/0 è una **FORMA INDETERMINATA**, poiché equivale a qualsiasi numero..

------- Si consideri la seguente <u>EQUAZIONE DI 1° GRADO:</u>

$$6x = 18$$

applicando ad essa il <u>II° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA</u> ("moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero - una stessa espressione algebrica- $\neq 0$, si ottiene un'equazione equivalente alla data"), cioè dividendo entrambi i membri per 6, si ottiene un'equazione che ha sempre per soluzione x=3:

$$x = \frac{18}{6} = 3$$

cioè tale equazione è ***equivalente*** a quella di partenza.

Se, invece, si dividono entrambi i membri dell'equazione di partenza per zero:

$$\frac{6x}{0} = \frac{18}{0}$$

si ottiene un'uguaglianza tra due oggetti senza significato, cioè un'equazione che non è affatto equivalente a quella iniziale.

Lo stesso discorso può ripetersi se si moltiplica per zero entrambi i termini dell'equazione:

$6x*0=18*0$. Questa "equazione" ammette qualsiasi soluzione (sol. indeterminata). Essa è un'*identità*.

******

Il concetto di **isomorfismo** è fondamentale per *l'estensione degli insiemi numerici*.
Si ravvisa la necessità di creare altri insiemi numerici oltre a quello dei naturali
Es.; il banale problema di dividere 3 torte in parti uguali tra 5 bambini, non trova soluzione nell'ambito dei numeri interi (nessun bambino riceve un numero intero di torte) e porta alla necessità dei **numeri razionali** (rappresentati da *frazioni*). In termini algebrici, l'equazione 5x=3 dove x rappresenta la quantità di torta di ogni bambino, è la rappresentazone algebrica del problema; la soluzione dell'equazione (e del problema) è x=3/5 (di torta), un numero razionale.

L'insieme dei numeri razionali a rigore non è l'*unione* tra gli interi e i frazionari. Tutti i numeri razionali sono rappresentati a frazioni. Ma un sottoinsieme di esse, quello dei numeri razionali rappresentati dalle frazioni apparenti, può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi (ad es. a 2 corrisponde 4/2 [o 2/1 o qualunque delle infinite frazioni equivalenti a2/1], a 5 corr. 20/4, a 13 corr. 26/2, e così via.
4/2, 20/4, 26/2 sono concettualmente diversi da 2, 5, 13, ma dal punto di vista operativo si comportano allo stesso modo. La somma di 2 e 5 dà 8, mentre la somma dei corrispondenti 4/2 e 20/4 dà 28/4, che è il corrispondente di 7. E' per questa similarità operativa (isomorfismo tra l'insieme degli *interi* e l'insieme dei *razionali interi* (razioni apparenti) che in luogo di 20/4+4/2 possiamo scrivere 5+2.

Analogamente, se dobbiamo ad es. calcolare l'ipotenusa ***i*** di un triangolo rettangolo le cui misure dei cateti sono $c_1=2$ e $c_2=5$, risulta:
i = $\sqrt{(2^2+5^2)} = \sqrt{29}$ che non è un numero razionale (non si può esprimere come frazione, è quindi *irrazionale*). Analogamente per le soluzioni di un'equazione del tipo $x^2 = 29$.

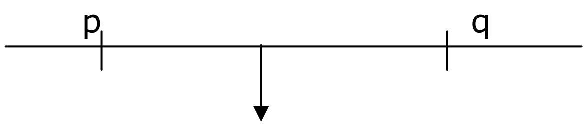
Di qui la necessità di introdurre un insieme numerico più vasto, quello dei **numeri reali.**
Tale insieme è di complessa e sottile definizione (ricorre a concetti dell'analisi matematica come *infinitesimo* e *limite*). Ma un suo sottoinsieme (dei *reali razionali*; l'altro è quello dei *reali irrazionali*) è isomorfo a quello dei razionali propriamente detti e dal punto di vista operativo (cioè agli effetti del calcolo) i reali razionali si possono sostituire con i razionali.

Un ulteriore ampliamento (ad es. per risolvere equazioni ad es. del tipo $x^2=-2$) porta alla costruzione dell'insieme numerico dei **numeri complessi**, rappresentabili come a+ib, dove a e b sono numeri reali e i (*<u>unità immaginaria</u>*) rappresenta la radice quadrata di -1.
Anche tale insieme conterrà un sottoinsieme (dei complessi reali, dove b=0) isomorfo a quello dei reali.

Ipotizziamo di rappresentare su una retta i **<u>NUMERI RAZIONALI</u>**, definiti come rapporti tra numeri interi, cioè frazioni del tipo:

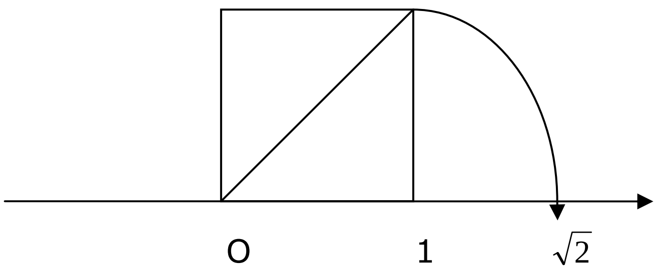
$$\frac{a}{b}$$

Presi due numeri razionali *p* e *q*, per quanto vicini, ammetteranno sempre, fra di loro, infiniti altri numeri razionali; ad esempio, il numero (p + q) / 2 è sicuramente un numero razionale intermedio tra *p* e *q*:



(p + q) / 2

Mentre fra i numeri naturali esiste una *<u>successione discreta</u>* (1, 2, 3…), **non esiste il successivo** (né il *precessivo*) **di un numero razionale**,
Pur essendo infiniti, i numeri razionali non esauriscono l'intera retta; infatti, se traccio un quadrato di lato = 1 con la sua diagonale e punto nell'origine (O) con raggio=diagonale, interseco l'asse delle ascisse in un punto che si chiama $\sqrt{2}$



Il numero così definito non è un numero razionale, in quanto non si può esprimere come frazione, ma è un **<u>NUMERO IRRAZIONALE</u>.**
Fra gli infiniti numeri razionali, dunque, ci sono infiniti "buchi" occupati dai numeri irrazionali.
Solo i **<u>NUMERI REALI</u>** (razionali e irrazionali) "riempiono" tutta la retta.
Perchè? Come vanno i conseguenza definiti i numeri reali?

Questo rappresenta il problema della <u>continuità</u>, risolto da Dedekind nella seconda metà dell'800 e che qui non trattiamo.

V – I SISTEMI ASSIOMATICI

Il concetto di *STRUTTURA ALGEBRICA*, già trattata nella lezione precedente, permette di manipolare oggetti o enti, attraverso opportune RELAZIONI.

Esempio:

La seguente scrittura:

$$(a\ ;\ b;\ +) \Rightarrow c$$

o più semplicemente: $a + b = c$

rappresenta la relazione di addizione degli elementi **a** e **b**, che dà come risultato **c**. Si stabilisce una **RELAZIONE BINARIA** tra la coppia *(a;b)* ed il risultato *c*, oppurei una **RELAZIONE TERNARIA** tra gli oggetti *a*, *b* e *c*.
Oltre agli insiemi in cui vengono definiti gli oggetti e le operazioni, è necessario individuare anche le loro proprietà.

******

- Come si inserisce il concetto di sistema assiomatico in questo discorso?

La matematica è come un gioco; pertanto, quando si costruisce il gioco, la struttura stessa del gioco necessita innanzitutto dei "pezzi" (nei giochi da tavolo: carte, scacchi, pedine, ecc.), ognuno contrassegnato con un simbolo.

La matematica, tuttavia, non è strutturata in modo elementare, ma può essere assimilabile al "LEGO" o al "MECCANO", costituito da pezzi elementari che opportunamente collegati danno luogo a pezzi più complicati.

È fondamentale stabilire delle regole sui pezzi elementari e su quelli più complessi, con cui relazionare tali pezzi, cioè delle proprietà.

I pezzi elementari con i quali si costruisce la matematica si dicono ENTI PRIMITIVI.

- in *ARITMETICA* gli enti primitivi sono i *NUMERI NATURALI*;
- nella *GEOMETRIA* di Euclide gli enti primitivi sono *PUNTO, RETTA E PIANO*.

Gli enti primitivi costituiscono il punto di partenza; sono concetti elementari che non si definiscono direttamene poiché qualsiasi definizione rimanda a concetti precedenti, inesistenti nel caso dei concetti primitivi (quelli di partenza").

Per caratterizzare gli enti primitivi non ci si può affidare alla sola *INTUIZIONE*, anche se molto utile, ma è necessario andare oltre la percezione intuitiva, che potrebbe essere soggettiva. Sia il punto di partenza che le regole devono essere, infatti, condivise.
Si devono, dunque, introdurre delle delle proprietà di relazione tra gli enti primitivi (non di ogni singolo), delle loro **PROPRIETÀ COLLETTIVE** enunciate e accettate come vere a priori in quanto **ASSIOMI (O POSTULATI)** ed assunte come

punto di partenza. Le proprietà che legano i pezzi elementari sono decise in partenza e i "giocatori" le devono solo accettare.

Vi sono due fondamentali <u>*requisiti per formulare un postulato*</u>:

1) I postulati (o le loro conseguenze logiche) *non* devono essere *contraddittore*;
2) Le proprietà, sia degli enti primitivi che di quelli derivati (e il modo di dedurle dalle prime) *devono sottostare alle leggi della* **LOGICA FORMALE**, che stabilisce, per dirlo in termini intuitivi, le regole del buon funzionamento di un ragionamento.

ASSIOMA (o postulato) = **PRINCIPIO**, ossia punto di partenza, "regole" iniziali (espresse da *proprietà* degli oggetti matematici), che si accettano senza dimostrazione.

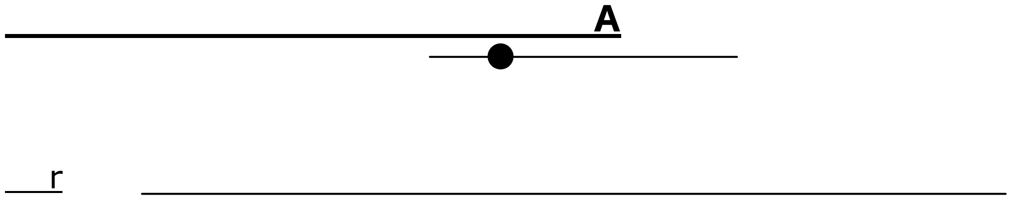
I principi costituiscono <u>una scelta</u>. La giustificazione di tale scelta sta nel fatto che <u>*funzionano*</u>.. Essi **sono accettati** perché **sono coerenti e non contradditori**, ma soprattutto perché **sono applicabili**.
Attraverso il "gioco" della matematica (sarebbe più corretto parlare di giochi delle matematiche) siamo in grado di produrre "modelli" della realtà.

I POSTULATI (o ASSIOMI), rappresentano le proprietà (*scelte* a priori, quindi arbitrarie , anche se inizialmente suggerite dall'intuizione, purchè non contradditorie) degli enti primitivi; si possono intendere come le REGOLE GENERALI di base del gioco (matematica).

In geometria gli enti primitivi sono i concetti di *punto*, *retta*, *piano*. I postulati relativi sono quelli famosi di Euclide (Esistono infiniti punti, rette, piani; per un punto assano infinite rette; Per due punti passa una ed una sola retta; ecc.)

Famoso il 5° postulato di EUCLIDE:

<u>sia data una retta r ed un punto A esterna ad essa, allora per A passa una ed una sola retta parallela a r.</u>



Un'altra geometria (*sferica*) nasce dall'assioma che per A passano infinite rette parallele ad r, e non c'è nulla che contraddica questa affermazione.
Proprio per questo si parla di una GEOMETRIA diversa da quella EUCLIDEA, comunque coerente.
Un'altra ancora (*iperbolica*), altrettanto coerente e autoconsistente si fonda sul postulato che per il punto A non passi alcuna retta parallela ad r.

In aritmetica gli enti primitivi sono i *numeri naturali*. I relativi postulati, quelli di Peano (che qui non citiamo).

Esempio: Scelta di un principio in fisica.

2° Legge di Newton:

F = m $\overline{a}$

Perché questo tipo di relazione tra F ed $\overline{a}$, e non F = m a², oppure F = m $\sqrt{1/a}$?

Perché la relazione F = m $\overline{a}$ è posta come **PRINCIPIO DELLA DINAMICA**, principio fondamentale, punto di partenza da accettare. Infatti, nelle verifiche sperimentali, non c'è nulla che lo contraddica e soprattutto è applicabile e funziona nelle descrizioni dei fenomeni ove intervengono forse e moti.

******

In matematica non esiste nulla di ovvio o intuitivo; gli ENTI e le PROPRIETA' possono essere date, per assioma o per definizione o per dimostrazione, perciò è necessario ragionare secondo opportune regole ed applicare le regole in modo corretto.

Si prenda in considerazione l'insieme dei **NUMERI NATURALI**, definiti dai ***postulati di PEANO***:, del tipo:

1. i numeri naturali sono infiniti;
2. ogni numero naturale ha il successivo;
3. ogni numero naturale, tranne lo 0, ha il precessivo.

   Ecc.

Ci si rende presto conto di come ci siano dei **limiti** nella capacità del "gioco" di costituire un adeguato e potente linguaggio-strumento per la rappresentazione del mondo, di come sia indispensabile un continuo progresso della matematica.

******

Nel "gioco" possono intervenire nuove esigenze, che è possibile soddisfare attraverso la costruzione di **ENTI DERIVATI**, più complessi, costruiti con gli enti primitivi.

IN ARITMETICA:

In pratica, si è partiti dalla generalizzazione dei NUMERI NATURALI per estenderli ai NUMERI FRAZIONARI O RAZIONALI, ai NUMERI INTERI RELATIVI (anche se la loro introduzione non ebbe vita facile), ai NUMERI IRRAZIONALI ed, infine, ai NUMERI REALI.

La **GEOMETRIA**, in modo analogo, parte da enti primitivi (PUNTO, RETTA E PIANO) ed introduce successivamente gli enti derivati.
Ad esempio, dal concetto di retta e di punto si introduce il concetto di *segmento*, che è la parte di retta delimitata da due punti, detti *estremi*.
Con gli enti primitivi e con la definizione degli enti derivati è possibile costruire la geometria con tutte le sue figure geometriche.

Sulle DEFINIZIONI

Gli **ENTI DERIVATI** godono di proprietà che devono essere dimostrate mediante <u>TEOREMI</u>, attraverso *deduzioni:*

Es.:

1) "La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto (180°)".
2) "Un triangolo è un poligono con tre lati e tre angoli".

Si tratta di due proprietà diverse, dove l'ultima è la definizione di triangolo, ossia è la proprietà necessaria e sufficiente perché un poligono sia un triangolo. E' come attribuire un nome ai poligoni dotati di tre lati e tre angoli.

La prima proprietà invece deriva da un *teorema*, necessita cioè di una <u>*dimostrazione*</u>.

Dal punto di vista generale, **fornire una definizione significa attribuire un nome (sintesi nominale) ad un oggetto complesso**, derivato, enunciandone le sue proprietà essenziali. Questo è il punto di partenza per caratterizzare completamente l'oggetto.
La parola triangolo, ad esempio, rappresenta una <u>SINTESI NOMINALE</u> che sottintende le *proprietà definitorie* dell'oggetto, e che si possono assumere come punto di partenza per determinare tutte le proprietà dei triangoli, per a partire dagli assiomi
.

<u>David HILBERT</u> (1862 – 1943) a proposito della struttura matematica come gioco, afferma:
"La matematica è un gioco che si conduce secondo certe semplici regole, con segni sulla carta privi di significato".

Questi **SEGNI** sono dei **SIMBOLI**, che godono di certe proprietà; è significativo il loro combinarsi, le loro proprietà di relazione, non il significato del simbolo stesso. Si inventano operazioni date dalla composizione dei segni.

Riepilogo:

<u>*ENTI PRIMITIVI*</u> = pezzi elementari del gioco

<u>*ASSIOMI*</u> = come si comportano i pezzi fondamentali del gioco

<u>*ENTI DERIVATI*</u> = pezzi complessi del gioco che si costruiscono con i pezzi elementari

<u>*TEOREMI*</u> = enunciano, dimostrandole, le caratteristiche (proprietà) che hanno i pezzi complessi del gioco.

- <u>I TEOREMI</u>

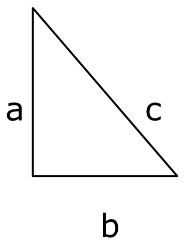
I teoremi enunciano, mediante <u>TESI</u>, le proprietà degli enti derivati definiti e circoscritti dalle <u>IPOTESI</u>, che rappresentano i vincoli iniziali.

Ad esempio, non si può affermare che per un qualsiasi triangolo la somma dei quadrati di due lati corrisponde al quadrato del terzo lato, in quanto tale affermazione è vera se e solo se la figura piana in oggetto è un triangolo rettangolo.

Le *IPOTESI* sono vincolanti per dimostrare la *TESI*.

Esempio:

Hp) il triangolo è rettangolo;
Th) vale per esso il <u>TEOREMA di PITAGORA</u>.



⇨ $a^2 + b^2 = c^2$

Se l'ipotesi è verificata allora anche la tesi è verificata.

La NON IPOTESI non implica necessariamente la NON TESI.

Esempio:

Hp) un signore abita a Padova;
Th) egli abita nella regione Veneto.

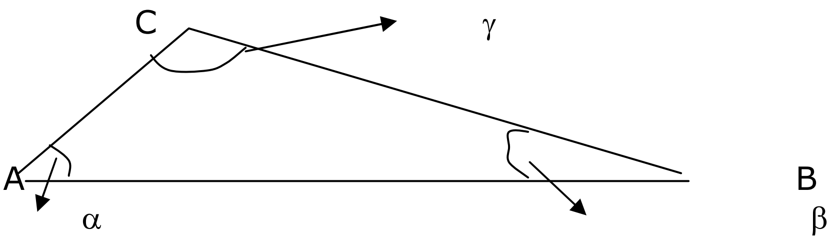
Il fatto di abitare a Padova è una condizione <u>non necessaria</u>, ma <u>solo sufficiente</u> per abitare nel Veneto, mentre la condizione di abitare nel Veneto è condizione necessaria (ma non sufficiente) per abitare a Padova.

Esistono teoremi per i quali l'ipotesi è condizione sia necessaria che sufficiente per la tesi.

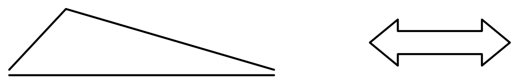
Significa che a partire dall'ipotesi si può dimostrare la tesi, ma anche viceversa.

Esempio:

Hp) sia dato un triangolo qualsiasi;
Th) la somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto.



Da ciò è possibile dedurre che: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Ma **vale anche l'inverso**, ossia se una figura piana ha la somma degli angoli interni pari a 180°, allora la figura piana è un triangolo.
Perciò si può scrivere la relazione deduttva in questo modo:

 $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,

perché l'una implica l'altra.

- <u>METODO IPOTETICO DEDUTTIVO</u>

Euclide/teoremi

Ipotesi ⇨ Tesi

Col metodo ipotetico deduttivo, da una premessa si deduce una conclusione.

.
Si consideri ora la <u>TRANSITIVITÀ DELLE DEDUZIONI</u>.

Esempio:

da A
⇩ deduco
da B
⇩ deduco
da B
⇩ deduco
C

Ciò implica che da A deduco C, ossia A ⇨ C.

Nell'applicare il metodo ipotetico deduttivo devo rispettare i **tre assiomi (o postulati) su cui si fonda la logica formale** detti più propriamente

Princìpi della logica formale:

PRIMO PRINCIPIO

A = A. Ogni concetto (ente, oggetto, proprietà, relazione, ecc.) è uguale a se stesso.
Se A non fosse uguale a sé stesso, ci sarebbe la possibilità che A sia uguale a qualcos'altro; è un'ovvietà che deve essere comunque esplicitata, altrimenti non potremmo operare nessuna distinzione tra oggetti, pena l'impossibuilità di ogni ragionamento.

SECONDO PRINCIPIO

Un concetto non deve essere contraddittorio; ossia, affermare che A può essere "A" e "non A", non ha alcun significato, perché un oggetto può essere "A" oppure "non A".
In definitiva, un oggetto non può essere contemporaneamente una cosa ed il suo contrario.

TERZO PRINCIPIO

O "del terzo escluso" (tertium non datur). **A è o non è** (è vero o è falso, ecc.). **Non esiste una terza possibilità. A non può essere né vero né falso.**
Da notare la complementarietà. Con il secondo principio. Senza il terzo principio, assumeremmo sì che A on può essere vero e falso ad un tempo, ma lasceremmo aperte altre possibilità, cioè che A non sia né vero né falso.

Non sempre tutte le ipotesi dei teoremi sono esplicite; talora sono "nascoste" all'interno di altre, risultando cioè IMPLICITE.
Ad esempio, ipotizzare che un numero sia pari implica ammettere che i numeri pari sono infiniti (questa è un'ipotesi implicita, che si nasconde dietro l'aver affermato di considerare un numero pari).

Nelle dimostrazioni, non sempre si procede dall'ipotesi alla tesi. Talvolta è necessario **RAGIONARE PER ASSURDO**, cioè partire dalla *negazione della tesi* per arrivare a *contraddire l'ipotesi* giungendo, quindi, ad affermare la tesi, per i postulati della logica formale.

Hp1	A	**Hp2**.	$\overline{B}$ (significa che B non è vero).
	$\Downarrow$		$\Downarrow$
Th	B		C
			$\Downarrow$
			D

Se la deduzione D, ammettendo la seconda ipotesi (non B), risulta in contraddizione con la prima ipotesi (A), allora la tesi della seconda ipotesi non è accettabile e quindi è vero che:

$$A \Rightarrow B$$

Esempio:

Hp) Sia dato il numero

Hp);

Th) $\sqrt{2}$è un numero irrazionale, cioè non è esprimibile come rapporto tra due numeri interi.

Si ipotizzi, PER ASSURDO:

$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, ossia che $\sqrt{2}$ = rapporto di due numeri interi p e q.

Elevando al quadrato ambo i membri, si ottiene:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Scomponendo in fattori primi i due termini $2q^2$ e p^2, ne deriva che il termine $2q^2$ contiene sicuramente un numero dispari di fattori uguali a 2 (1 se q è un numero dispari; 3, 5, 7… se q è pari), mentre il termine p^2 contiene sempre un numero pari (o nessuno) di fattori uguali a 2.
Per il TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA, ogni numero è scomponibile nel prodotto di fattori primi in un solo modo, mentre se fosse vera la relazione $2q^2 = p^2$ porei scomporlo in due modi diversi. Pertanto l'ipotesi di partenza deve essere falsa ed è quindi vero che $\sqrt{2}$ non è esprimibile come rapporto di due numeri interi. Quindi, accanto ai numeri razionali, è necessario introdurre anche i numeri irrazionali.

Molte volte le dimostrazioni si effettuano per **SILLOGISMO**.
Se gli elementi di un insieme godono di una certa proprietà, l'appartenenza di un oggetto all'insieme trasferisce all'oggetto la proprietà stessa.
Alla tesi di un teorema si giunge attraverso una dimostrazione, con una catena di deduzioni (spesso si tratta di sillogismi), secondo regole di inferenza derivate dai principi della logica..

Esempio (di sillogismo):

"Tutti gli esseri umani sono mortali (premessa maggiore), Socrate è un uomo (premessa minre) e quindi è mortale (conclusione)".

Schematizzazione grafica:

Dalle proprietà dimostrate dai teoremi. Dalle proprietà degli oggetti matematici e dalle relazioni tra essi	Dalla definizione delle operazioni e dalle loro proprietà

⇓

è possibile stabilire

⇓

REGOLE e PROCEDURE
(regole del gioco)

Un **sistema assiomatico**, costituito da enti primitivi, assiomi, enti derivati e teoremi, deve essere:

1. **NON CONTRADDITTORIO,** cioè dagli assiomi si derivano i teoremi, che non devono essere in contraddizione:

E1, E2, E3,…(= enti primitivi);

A1, A2, A3,…(= corrispondenti assiomi che si riferiscono alle relazioni tra gli enti primitivi dati);

⇨ T1, T2, T3…Tn (= teoremi, derivati dagli assiomi, per cui non si devono trovare contraddizioni).

2. **COMPLETO**:

Tutte le definizioni, le proposizioni e le proprietà devono essere deducibili dagli assiomi. Non ci può essere deduzione che non sia riferita al sistema, che non sia dimostrabile o deducibile dagli assiomi del sistema. Quindi non può esservi un assioma che risulti esterno all'edificio (sistema) costruito in modo rigoroso.

Nel 1931 con GÖEDEL si assiste alla messa in crisi dei principi del sistema assiomatico. Egli dimostra che ci sono proposizioni vere, non dimostrabili a partire dagli assiomi, che stanno quindi "fuori dal sistema". Il sistema non è *completo*. Si dimostra che se lo fosse sarebbe contradditorio.

E il *calcolo*?

Separare la teoria dal calcolo è errato. Le proprietà dimostrate da teoremi giustificano gli algoritmi di calcolo: non si studia senza capire la teoria, ovvero non si applicano le regole senza comprenderle.

Dalle proprietà dimostrate dai teoremi (proprietà degli oggetti matematici e delle relazioni fra essi)

Dalle definizioni delle operazioni e dalle loro proprietà

$\Downarrow \quad \Downarrow$

Regole di calcolo
(regole del gioco)

Esempio:

Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Per risolvere le equazioni algebriche ci si avvale di **due** ***PRINCIPI FONDAMENTALI*** (postulati):

1° - *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, si ottiene un' equazione equivalente a quella di partenza* (**1° principio di equivalenza**):

$ax + b = c$

sottraendo b sia a destra che a sinistra dell'uguale si ottiene:

$ax + b - b = c - b \quad \Rightarrow \quad x = c - b$

equazione equivalente alla prima, cioè avente la stessa soluzione:

$$x = \frac{(c - b)}{a}$$

2°- *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, si ottiene un'equazione equivalente a quella di partenza* (**2° principio di equivalenza**):

$ax + b = c$

moltiplicando ambo i membri per un numero d, con d≠0, si ottiene:

$(ax + b) * d = c * d$

le due forme sono equivalenti.

Esempio:

L'equazione $2x = 10$ ha per soluzione $x = 5$.

- Se aggiungo ai due membri uno stesso numero, ad esempio (−2), ottengo per il 1° principio:

$2x-2=10-2$ ⇨ $2x-2=8$ che è soddisfatta sempre per x=5.

- Se moltiplico i due membri per (+4), ottengo per il 2° principio:

$2x*4=10*4$ ⇨ $8x=40$ che è soddisfatta sempre x=5.

Applicando i due principi di equivalenza, tutte le soluzioni della 1° equazione sono soluzioni anche della 2° equazione e viceversa.

******

Il ragionamento può essere trasferito ad un'equazione complessa. Si parte da:

E1 (x)

attraverso una serie di ragionamenti e passaggi, si giunge ad un'espressione in cui la x è uguale ad un termine noto, ad un numero o a un'espressione che non contiene l'incognita. Si ottiene un'equazione del tipo:

x = C, con C costante.

Questa è un'equazione molto "facile", poiché si legge immediatamente la soluzione (C).

Le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 2+1=3 \\ x+x=2x \end{cases}$$

sono esempi di **IDENTITÀ**, cioè <u>uguaglianze sempre verificate</u>, per qualunque x del campo di appartenenza delle funzioni.

Mentre le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2=4 \end{cases}$$

sono esempi di **EQUAZIONI**, cioè sono <u>verificate solo per particolari valori attribuiti all'incognita</u> (+1 per la prima e +2 e –2 per la seconda).

La scrittura $5x-5x=0$ è **IDENTICAMENTE NULLA**, cioè è <u>verificata per qualsiasi valore attribuito alla x</u>.

La seguente relazione:

$x+y=2x-x+y$

è un'espressione caratterizzata da due incognite (x, y). Si dovranno trovare, come soluzioni, coppie ordinate di valori, associati alla x ed alla y, che soddisfino l'uguaglianza data.

Certi problemi sono rappresentabilimeiante equazioni con molte incognite, tre, quattro, ……., n incognite, ottenendo, rispettivamente, soluzioni rappresentate da terne di valori, …., fino ad ennuple di valori. Se l'espressione fosse stata:

$x=y$

la relazione si sarebbe verificata solo e soltanto per ogni coppia di valori in cui la x è uguale alla y, ossia le coppie (0 ; 0); (1 ; 1), ecc.

Un'equazione può avere diverse soluzioni, anche infinite, come nel caso precedente ma non <u>tutti i valori possibili,</u> come per le identità. Ogni equazione intera di grado n ammette al massimo n soluzioni, che possono essere coincidenti, per cui si dice che c'è almeno una soluzione.

1) $x = 5$

è un'equazione, non un'identità, perché è vera solo per il valore 5. La soluzione si legge direttamente; è un numero e non serve fare alcun calcolo.

2) $\frac{3x-2}{5} = 5x + 7x - 14$

è un'equazione in cui non si legge la soluzione a prima vista, ma che deve essere risolta con varie tecniche, per trasformarla in un'altra equazione equivalente, fino ad arrivare ad una soluzione nota.

Si ritorna, al concetto precedente, cioè data un'equazione di partenza E1 (x), attraverso una serie di passaggi, la si trasforma in un'equazione equivalente, fino ad arrivare ad una equazione in cui si legge direttamente la soluzione.
Questi criteri per trovare equazioni equivalenti sono i citati <u>*principi di equivalenza*</u>, che sono accettati e condivisi in quanto "funzionano".

<u>************</u>

Spesso si dice che *la matematica è un'opinione*. Tale affermazione è vera, per un verso, in quanto la matematica implica la scelta degli enti primitivi, degli assiomi, che devono comunque essere accettati dalla comunità scientifica, e la costruzione di regole, le quali però, una volta fissate, dovranno essere rispettate; in questo senso non si può più parlare di "un'opinione".
Inoltre, la matematica, come la chimica, crea i propri oggetti. Essa si ispira alla realtà fisica, ma la verità di un'idea matematica non dipende dalla corrispondenza con la realtà (es. geometria non euclidea). La matematica, dunque, non deve rispondere alla realtà, (anche se è opportuno che sia "utile", come linguaggio e strumento per la rappresentazione della realtà fisica); essa non deve soggiacere a nessuna verifica sperimentale.
E', dunque, possibile dire che la matematica è un linguaggio con cui descrivere la realtà, è una rappresentazione simbolica, uno strumento con regole astratte.

Non deve esservi contraddittorietà fra gli assiomi e i teoremi (coerenza logica interna).
Ciò comporta:

- <u>definizioni univoche e complete</u>;
- <u>correttezza di sintassi</u>;
- <u>ogni proprietà o è enunciata da un assioma o è dimostrata</u>.

Non esistono ovvietà o eccezioni, in quanto una sola eccezione invalida il "problema".

VI – LA RICERCA MATEMATICA

- SCOPO DELLA MATEMATICA
-

Matematica pura:

JACOBI (1804-1851) sosteneva che "*L'unico scopo della matematica è l'onore dello spirito umano*". Questa concezione, sostenuta generalmente dai matematici "puri", vede la matematica come fine a e stessa,costruzione complessa e raffinata dello spirito, con una sua intrinseca bellezza e quale vertice del pensiero razionale umano, indipendntemente dalla sua utilità e valenza applicativa.

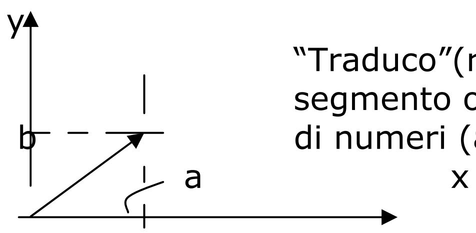
Matematica applicata:

Si creano modelli matematici come specchio di modelli fisici, come rappresentazione simbolica della realtà fenomenica; si crea dunque un *linguaggio* per esprimere le leggi naturali. I vettori, ad esempio, sono rappresentazioni simboliche di grandezze fisiche come forza, posizione, velocità, accelerazione,ecc. strumenti astratti con proprietà e regole operative astratte che rappresentano grandezze misurabili, che interagiscono nel mondo fenomenico.

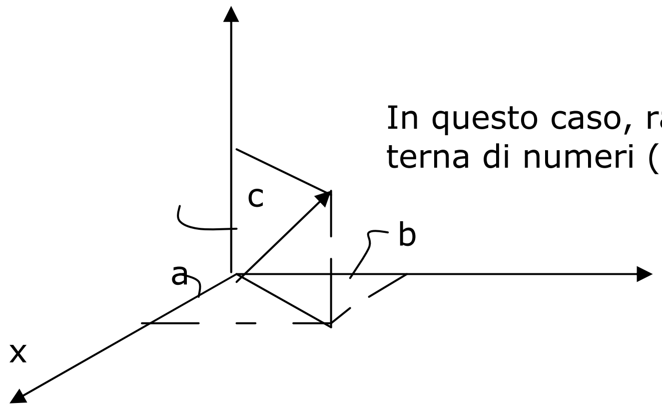
Albert EINSTEIN (1879-1955) sosteneva: "Come può succedere che la matematica, essendo dopotutto un prodotto dello spirito umano indipendente dall'esperienza, sia così mirabilmente confacente con gli oggetti reali".

- OBIETTIVI DELLA RICERCA MATEMATICA

a. **Costruire** nuove strutture algebriche (il calcolo vettoriale è relativamente recente)
b. **Generalizzare**, ossia costruire strutture sempre più vaste, utili per comprendere strutture già preesistenti come casi particolari (i numeri naturali non bastano quindi si introducono i numeri razionali e quindi i reali e i complessi).
c. **Rappresentare**, o meglio, inventare nuove rappresentazioni di strutture preesistenti, le cosiddette *strutture isomorfe*. Ciò significa anche studiare gli spazi a più di tre dimensioni (tutte le operazioni si traducono in operazioni fra numeri, per cui si possono inventare vettori con quattro e più coordinate, anche infinite.



"Traduco"(rappresento) il vettore come segmento orientato sul piano con la coppia di numeri (a; b).



In questo caso, rappresento il vettore con la terna di numeri (a; b; c).

In uno spazio ad "n" dimensioni, il vettore risulta caratterizzato da una ennupla di numeri tipo (x1; x2; x3; ……., xn).

d. **Trasformare**, ossia <u>inventare nuovi operatori per la trasformazione di oggetti matematici</u>:

e. **Modellare**, ossia <u>inventare rappresentazioni fedeli delle realtà fenomenologiche</u>. Si tratta di costruire modelli matematici, generalmente mediante *equazioni algebriche* (le soluzioni sono numeri o vettori o espressioni letterali) e le *equazioni differenziali* (le soluzioni sono funzioni).
Modello = efficace strumento di descrizione relazionale e/o quantitativa della realtà.

<u>GALILEO GALILEI</u> può essere ritenuto il padre_della scienza sperimentale, l'inventore del metodo sientifco moderno. Egli sosteneva:
"La filosofia è scritta in un grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, (Io dico universo), ma non si può interpretare se non se ne capisce il linguaggio…Esso è quello della matematica…".

<u>NASH</u> (1928-…), premio Nobel nel 1994; molto importante è la sua teoria dei giochi, molto applicata nelle strategie militari ed economiche.

f ***Scoprire nuove proprietà*** *degli enti matematici*, mediante nuovi teoremi. Ciò significa trovare nuove connessioni anche tra oggetti di natura completamente diversa:

- Ultimo teorema di FERMAT (1637-1695; avvocato, matematico per diletto):
- Faceva parte, fino alla sua dimostrazione nel 1995(Andrew Wiles) dei grandi problemi matematici insoluti, come i tre classici noti fino dall'antichità:

1) <u>QUADRATURA DEL CERCHIO</u>: dato un cerchio, si vuole costruire, con sola riga e compasso, cioè per costruzione puramente geometra, un quadrato equivalente (di area uguale). Il problema è stato dimostrato insolubile da Lindemann sol nel 1850, sulla base del fatto che il numero π; oltre ad essere un numero irrazionale è anche trascendente, cioè non può essere

soluzione di nessuna equazione intera a oeffcienti razionali, qualsiasi sia il suo grado.

2) TRISEZIONE DELL'ANGOLO: dato un angolo, si vuole suddividerlo con riga e compasso in tre angoli equivalenti.
3) DUPLICAZIONE del cubo.

Se di un teorema non si è dimostrata la verità o la falsità, ma soltanto si suppone che sia vero si chiama **CONGETTURA**.

Esempio ("Ultimo teorema di Fermat")

1. Data la seguente relazione:

$x^2 + y^2 = z^2$,

esistono infinite terne di numeri interi che soddisfano a tale relazione, (che esprime il teorema di Pitagora); terne pitagoriche.

2. Data la seguente relazione:

$x^3 + y^3 = z^3$

secondo Fermat non ci sarebbe nessuna terna di numeri interi tale da verificarla.

3. Data la seguente relazione:

$x^n + y^n = z^n$

non esiste alcuna terna di numeri interi che verifica la relazione stessa.

Nemmeno GAUSS è riuscito a dimostrare questo teorema, o meglio questa congettura, che fu dimostrata nel 1995 da Andrew WILES (1953-…), dopo quasi 350 anni, con sofisticati metodi della matematica moderna..

Fermat ha inventato: teoria dei numeri; geometria analitica (con Cartesio); calcolo delle probabilità (con Pascal); precorsi del calcolo integrale. ******

Nel 1400 l'unica importante scoperta matematica fu la scoperta delle leggi della prospettiva (Brunelleschi e Alberti).

- METODI DELLA RICERCA MATEMATICA

1. *METODO INDUTTIVO* (dal particolare al generale).

Non ha nessuna validità dimostrativa e può avere valore euristico.
Si osserva un insieme di oggetti e si è indotti a pensare che tutti gli oggetti godano delle stesse proprietà. Si è portati, dunque, ad estendere tali proprietà all'insieme di oggetti della stessa natura.
Il termine "euristico" coincide con il termine "intuisco che…". Infatti la legge di gravitazione universale di Isaac NEWTON non è stata dimostrata, ma è stata intuita e quindi sperimentalmente verificata

2. *METODO IPoTETICO- DEDUTTIVO*.

   L'unico ad avere validità dimostrativa (la dimostrazione di un teorema consiste in una catena di deduzioni).

Alla fine del processo creativo (che può seguire diverse vie (empirica, intuizionistica, induttiva, …(è necessaria una *formalizzazione rigorosa*, che comporta:

1) **BACKGROUND CONDIVISO**;
2) **DEFINIZIONI COMPLETE E UNIVOCHE**, (i simboli sono arbitrari, salvo quelli storicamente consolidati);
3) **DIMOSTRAZIONI CORRETTE**, mediante l'utilizzo di una sintassi coerente e logicamente ineccepibile.

Spesso le scoperte matematiche sono state stimolate dalla ricerca di strumenti applicativi (Nepero). Ad esempio l'uso delle derivate, degli integrali e
Altre volte scoperte matematiche, nate da esigenze puramente teoriche interne alla matematica stessa, hanno trovato in seguito feconde applicazioni. Es.: la teoria dei gruppi di Galois (1811-1832); strutture algebriche che si sono rivelate utili applicativamente solo nel '900, ad es. per la chimica teorica e la progettazione di molecole
.Nel XX secolo si è fatta strada una corrente di pensiero nuova, legata all'influenza dell'**informatica** sulla matematica e in altri settori scientifici.
Se i processi euristici possono svilupparsi per via empirica intuitiva, alla fine ogni scoperta matematica, quale che sia la sua significatività, per essere accettata dalla comunità scientifica come inconfutabile, deve essere convalidata dalla dimostrazione.
CHOMSKY sosteneva che "Nozioni oscure legate esclusivamente all'intuizione potrebbero non condurre a conclusioni corrette". Tutto ciò che è intuito, ma non rientra in un ordine rigoroso, non è utilizzabile.

La MATEMATICA è:

- attività intellettuale ricca dal punto di vista;
  - estetico (la scienza matematica mostra, in modo particolare, ordine, simmetria e restrizione, che rappresentano le forme più grandi di bellezza);
  - metodologico;
  - concettuale;
  - emozionale;
- linguaggio, ossia strumento insostituibile per la descrizione del mondo fisico: dare risposta alle domande scientifiche.
-
- E a questo proposito:.

"*Noi percepiamo che, anche quando tutte le domande scientifiche, avessero trovato risposte, i nostri problemi esistenziali non sarebbero minimamente toccati. Certo allora non resta più domanda alcuna e proprio in questo è la risposta*".

WITTGENSTEIN (1889-1951; filosofo)

VII – INSIEMI E INFINITO

Il problema dell'infinito provocò verso la fine del 1880 una rivoluzione che vide in Georg **Cantor** (1845–1918) il protagonista principe, ed ebbe ricadute sui fondamenti di tutta la matematica.

E' l'epoca, tra la fine dell'800 e i primi decenni del '900, della cosidetta "critica dei fondamenti, che vide protagonisti, oltre a Cantor, grandi matematici, quali

- Richard **Dedekind** (1831–1916) (studiò i numeri reali, la continuità e la Teoria degli insiemi);
- Bertrand **Russell** (1872-1970). Studiò gli infiniti di Cantor e la logica matematica;
- David **Hilbert** (1862–1943) (sistematizzazione e rigorizzazione della geometria di Euclide e dei sistemi assiomatici in generale);
- Kurt **Gödel** (1906 – 1978). Il suo famoso teorema (1931) mise in crisi la concezione di Hilbert sui sistemi assiomatici.
- Paul **Cohen** (1934– vivente;ha risolto – nel 1963 – il problema dell'assioma di libera scelta e quindi dell'ipotesi del continuo. Vedi sotto).

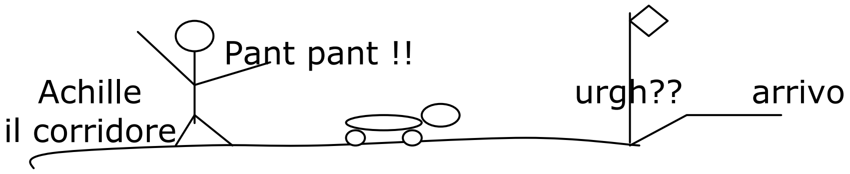
Il concetto di **INFINITO** ha origini antichissime; i filosofi pre-socratici, fra cui il noto <u>ZENONE</u> si posero il problema dell'infinito.

Riguardo gli insiemi infiniti, possiamo porci, in sintesi, delle fondamentali domande:

- ❖ *Che cos'è un insieme INFINITO?*
- ❖ *Ha senso parlare, in qualche modo, di "numerosità" degli insiemi infiniti?*
- ❖ *Tutti gli infinti sono uguali?*

Gli antichi greci parlavano di **INFINITO POTENZIALE** come di qualcosa che procede senza mai terminare e che dovunque arrivi, si possa andare oltre (infinito in potenza).

ZENONE mise in luce le difficoltà legate all'incompletezza della definizione di infinito; in particolare, nel *PARADOSSO DELLA TARTARUGA* si comprende come all'epoca non fosse esplicitata la differenza tra infinito ed infinitesimo.



la tartaruga e la sua sfida

Tutto faceva pensare che dalla somma di infiniti tempi risultasse un tempo infinito. In realtà si tratta di una serie convergente. Pertanto il difetto, in questo paradosso, sta nel fatto che non sempre una somma di infiniti termini dà un termine infinito.

Esempio:

Preso un intervallo [0,1], la somma degli infiniti termini
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$ converge ad uno.

Speculare al concetto di infinito (potenziale) è quello di *infinitesimo*.

******

Il concetto di **INFINITO REALE** si scontra con quello di **INFINITO POTENZIALE** considera l'infinito come un tutt'uno, un blocco unico, non come una sequenza che non finisce mai.
Se consideriamo l'insieme infinito come un blocco unico, cioè un insieme, per definizione, è necessario definirlo in modo *sintetico* (enunciazione di proprietà comuni a tutti gli infiniti elementi..

Sia EUCLIDE che GAUSS si sono "scontrati" con il concetto di infinito.
CANTOR, dopo aver affermato, a cavallo del 1900, che l'infinito reale era il modo corretto per definire l'infinito, fu considerato un eccentrico, perché le sue idee erano troppo rivoluzionarie, andavano contro l'intuizione.

CONTINUA NELLA DISPENSA: **Insiemi e Infinito**