(Prof. Emilio F. Orsega)

Dispensa:

Insiemi e infinito

“ Ho percepito, nelle pagine di Russell, la teoria degli insiemi, la *Mengenlehre*, che postula e esplora i vasti numeri che un uomo immortale non raggiungerebbe nemmeno se consumasse le sue eternità contando, e le cui dinastie immaginarie hanno come cifre le lettere dell’alfabeto ebraico.
In tale delicato labirinto non mi fu dato di penetrare”.

Jorge Luis Borges (1899-1986, da “*Nihon*”).

1 INTRODUZIONE

Da quanto è stato accennato nelle precedenti lezioni, risultano basilari per una corretta e feconda fondazione assiomatica delle matematiche i concetti di **insieme** (o *classe*) e di **infinito**, che hanno variamente attraversato tutta la storia della matematica.

Nel secolo XIX i matematici si resero conto che lo straordinario sviluppo della matematica in corso (soprattutto nel campo dell’analisi, ma anche della geometria e dell’algebra) richiedeva fondamenti più certi e rigorosi. Ciò ha dato inizio a profonde e articolate riflessioni attorno ai concetti e ai principi di base della matematica.

Se, con semplicistica ellissi, consideriamo gli insiemi di numeri o di punti alla base dell’analisi matematica, dell’algebra e della geometria, risulta evidente la necessità di trattare correttamente con **insiemi infiniti** (o insiemi contenenti infiniti elementi).

I problemi e le antinomie legati al concetto di **infinito** e **infinitesimo** e a quello ad essi correlato di **continuità** erano rimasti sostanzialmente irrisolti fin dai tempi di **Zenone** di Elea (490-425 a.C.), che ne mise in luce le difficoltà con i suoi famosi paradossi.

Mentre il problema degli **infinitesimi,** legato al concetto di *limite* introdotto da Cauchy, fu risolto da Karl **Weierstrass** (Germania,1815-1897) nell'ambito dell'*analisi matematica*, l'infinito e la continuità giocarono un ruolo chiave nella problematica rifondazione epistemologica della matematica, che si estende dalla seconda metà dell'ottocento fino ai giorni nostri.

Le riflessioni sugli **insiemi infiniti** portarono Georg **Cantor** (Germania, 1845-1918) alla creazione della più rivoluzionaria teoria matematica degli ultimi secoli, la **teoria dei gruppi transfiniti** (1879-1884).

Da qui, nei primi decenni del secolo XX, mosse il tentativo di un'assiomatizzazione generale delle matematiche che portò alla luce una serie di difficili problematiche e di paradossi che stimolarono una profonda revisione critica dei fondamenti e una serie di scoperte sorprendenti che investivano in varia misura le basi di tutti i campi della matematica.

2 INSIEMI

Richiamiamo alcune *definizioni* sugli insiemi:

- **Insieme**: è una *collezione* di oggetti o enti (detti elementi dell'insieme). Può essere *finito* o *infinito*, contenere anche un solo elemento o nessun elemento (*insieme vuoto*).

- **Definizione di insieme secondo Cantor**: "Con il nome di *insieme* intendiamo ogni raccolta, classe, aggregato, totalità (M) di oggetti determinati ben distinti

- <u>**Un insieme è ben definito**</u> se dato un ente qualunque si può decidere con certezza se appartiene o meno all'insieme dato.

Ci sono sostanzialmente *due* ***modi di definire un insieme***:

a) <u>modo analitico</u>: si elencano tutti gli elementi dell'insieme, uno per uno (ad es. l'insieme formato dai numeri 1,2,3,4,5.

b) <u>modo sintetico</u>: si definisce l'insieme enunciando una proprietà goduta da tutti e soli gli elementi dell'insieme (ad es.: l'insieme dell'esempio precedente può definirsi come "l'insieme di tutti i numeri naturali minori di 6").

Gli insiemi finiti possono definirsi in entrambi i modi, ma ***gli insiemi infiniti si possono definire solo in modo sintetico*** (ad es.: "l'insieme di tutti i numeri naturali": sarebbe impossibile elencarli tutti!).

- Si dice che <u>B è un ***sottoinsieme*** *proprio* dell'insieme A</u> ($B \subset A$) se ogni elemento di B appartiene anche ad A, ma non viceversa (nel qual caso A=B, o B è sottoinsieme improprio di A , $B \subseteq A$).

- <u>Due insiemi A e B sono ***equipotenti***</u> se è possibile dare una legge che faccia corrispondere ad ogni elemento di A uno e uno solo di B e viceversa (legge di <u>***corrispondenza biunivoca***</u>).

  <u>*Se due insiemi sono equipotenti e finiti*</u> (tali cioè da poter elencarne gli elementi con un numero finito di passi), allora <u>*contengono lo stesso numero di elementi.*</u>

  <u>*Se un insieme è finito esso non può essere equipotente a un suo sottoinsieme proprio*</u> (postulato di De Zolt: "Il tutto è maggiore della parte").

3 INFINITO

3.1 <u>Insiemi infiniti</u>

Risulta evidente la *possibilità di corrispondenze biunivoche anche tra <u>insiemi infiniti</u>* (nel senso per ora intuitivo del termine): ad es. l'insieme dei numeri pari con quello dei dispari (basta associare ad ogni numero dispari il suo successivo – che è pari).
Ma è ugualmente possibile *porre in corrispondenza biunivoca un insieme infinito con un suo sottoinsieme proprio* (ad es.: l'insieme di tutti i numeri naturali – N={1, 2, 3 , 4, 5, ...} - con quello dei quadrati perfetti – Q_p=[1, 4, 9, 16, 25, ...} – E' sufficiente associare a ciascun numero naturale il suo quadrato).
Ciò implica che *il postulato di De Zolt non vale per gli insiemi infiniti*. Il "tutto" può non essere "più grande" di una sua parte.

<u>L'insieme dei numeri naturali è "numeroso" quanto il suo sottoinsieme dei naturali quadrati perfetti</u>! (E' più corretto sostituire a "numeroso quanto" il termine *equipotente*.

Questo primo risultato riguardo gli insiemi infiniti può essere assai sorprendente, poichè va contro l'intuizione, il senso comune.

Ma esso indica anche il modo di <u>*definire*</u> rigorosamente un <u>*insieme infinito*</u>:

- **Insieme infinito**

è ogni insieme equipotente ad almeno un suo sottoinsieme proprio.

3.2 ***Infinito potenziale e attuale***

Sul concetto di infinito si è disquisito per secoli, da Zenone ed Aristotele fino ai giorni nostri.

Infinito potenziale (o *infinito in potenza*): viene dato solo come possibilità di estendere senza fine un processo di enumerazione, escludendo quindi la possibilità di definire un insieme elencandone tutti gli elementi. Ad es. l'insieme dei numeri naturali è infinito poiché per quanto grande possiamo pensare un numero naturale, se ne può trovare almeno uno (e quindi infiniti) ancora maggiore.

Infinito attuale (o *infinito in atto, o **infinito reale***): viene dato come collezione di infiniti elementi, definita come tale da una proprietà caratteristica di tutti gli elementi e quindi svincolata dalla necessità di un processo che non ha termine. (ad es.: "L'insieme di tutti i numeri primi" - anche se non li conosciamo affatto tutti, ma sappiamo che sono infiniti: già Euclide l'aveva dimostrato – oppure. "L'insieme di tutti i triangoli")

Aristotele considerava solo la possibilità dell'*infinito potenziale*, ma non di quello *attuale*:

Anche **Newton** e **Leibniz**, consideravano solo *l'infinito potenziale*, che entra in gioco solo come tale ad es. nella definizione di limite, concetto cardine di tutto il calcolo differenziale.

L'infinito attuale fu sempre visto con diffidenza, se non con netto rifiuto da tutti i più grandi matematici precedenti a Cantor.

Perfino Carl Friedrich **Gauss** (Germania, 1777-1855), uno dei più grandi matematici di tutti i tempi (chiamato dai suoi contemporanei "Princeps Mathematicorum") rigettò con orrore il concetto di *infinito reale* in matematica. Nel 1831 egli scrive:

" *Protesto contro l'uso della grandezza infinita come qualcosa di compiuto, ciò che non è ammissibile in matematica. L'infinito è semplicemente un modo di* *esprimersi; il suo vero senso è un limite al quale certi rapporti si avvicinano indefinitamente, mentre altri possono crescere senza restrizione"*

E' solo con la *teoria degli insiemi infiniti* (o dei ***numeri transfiniti**, o **dei gruppi transfiniti***) di Cantor, che si assume la possibilità dell'esistenza dell'infinito attuale, insieme alla scoperta di conseguenti nuove problematiche e paradossi.

3.3. ***<u>I paradossi di Zenone</u>***

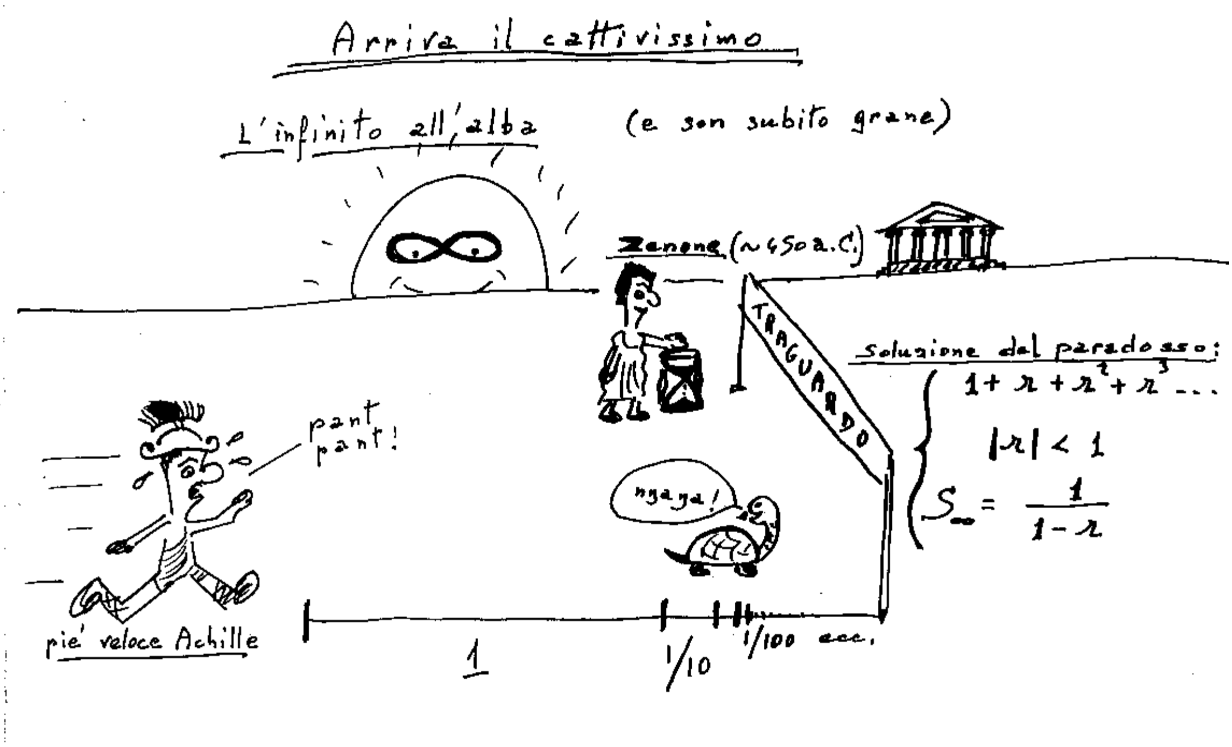
Ma con i ***paradossi*** inerenti a un'insufficiente comprensione e definizione del concetto di infinito si ebbe a che fare fin dall'antichità, da quando il filosofo greco **Zenone** (Elea, Magna Grecia, ora Basilicata, 490-425 a.C.), allievo di **Parmenide**, enunciò il suoi celebri paradossi di *Achille e la tartaruga* e del *moto di una freccia*.

1.- Achille e una tartaruga fanno una gara di corsa (ad es. sui mille metri).Achille dà un vantaggio alla tartaruga (ad es. di cento metri) e partono assieme. Zenone afferma che Achille non raggiungerà mai la tartaruga: infatti mentre Achille percorre i primi dieci metri in un tempo t_1 (ad es. dieci secondi), nel frattempo la tartaruga sarà andata avanti (ad es. di dieci metri); Achille percorre i dieci metri successivi in un tempo t_2 (un secondo) , ma nel frattempo la tartaruga avrà percorso un altro metro, Achille percorre questo metro in un tempo t_3 (un decimo), ma nel frattempo la tartaruga avrà percorso un altro piccolo tratto... Per raggiungere la tartaruga Achille dovrà percorrere infiniti intervalli di spazio in un tempo che è la somma di infiniti intervalli di tempo (t_1 + t_2+t_3 +...). Quindi Achille impiegherà un tempo infinito per raggiungere la tartaruga.

2.- Una freccia non potrà mai raggiungere il bersaglio, poiché prima dovrà percorrere la metà del tratto complessivo e poi la metà della metà (un quarto) e prima ancora un ottavo, e così via all'infinito. Allora il percorso della freccia sarà la somma di infiniti tratti, 1/2+1/4+1/8+ ... , cioè sarà infinito.

Oggi l'analisi matematica ci insegna che esistono serie convergenti, cioè che la somma di infiniti termini può essere uguale a un valore finito. Ma anche ai tempi di Zenone questo poteva essere evidenziato con semplici ragionamenti geometrici. Il paradosso di Zenone in realtà non metteva in dubbio la possibilità che Achille potesse raggiungere la tartaruga, bensì metteva in luce le difficoltà logiche e operative che potevano sorgere quando si trattava con il concetto di infinito (potenziale), dato intuitivamente, ma ben poco accessibile all'intuizione.

Zenone evidenziò anche le difficoltà a trattare con **quantità infinitesime**, aprendo quindi la problematica sulla **continuità**.



Potremmo illustrare molto semplicisticamente il concetto di *continuità* riferendoci alla retta (i cui punti oggi sappiamo essere in *corrispondenza biunivoca* con i *numeri reali*): per quanto vicini siano due punti, troveremo sempre infiniti punti compresi tra essi. Per percorrere un segmento dovremo passare per tutti i suoi punti, ma dato un punto P non esiste il suo successivo S (se esistesse sarebbe distinto da P, ma tra P e S esisterebbero infiniti punti e allora S non sarebbe più il successivo di P).

Tutto ciò vale anche per l'insieme dei punti razionali di una retta (cioè quei punti la cui distanza dall'origine è espressa da un numero razionale, da una frazione). Quindi i punti razionali sembrerebbero "riempire" la retta, senza lasciare nessun "buco".

La difficoltà sopravviene quando si scopre che i punti razionali non esauriscono tutti i punti di una retta, poiché ci sono infiniti punti associati ai numeri irrazionali (come $\sqrt{2}$ e π), che misero in seria difficoltà i matematici greci e furono aborriti da Pitagora.

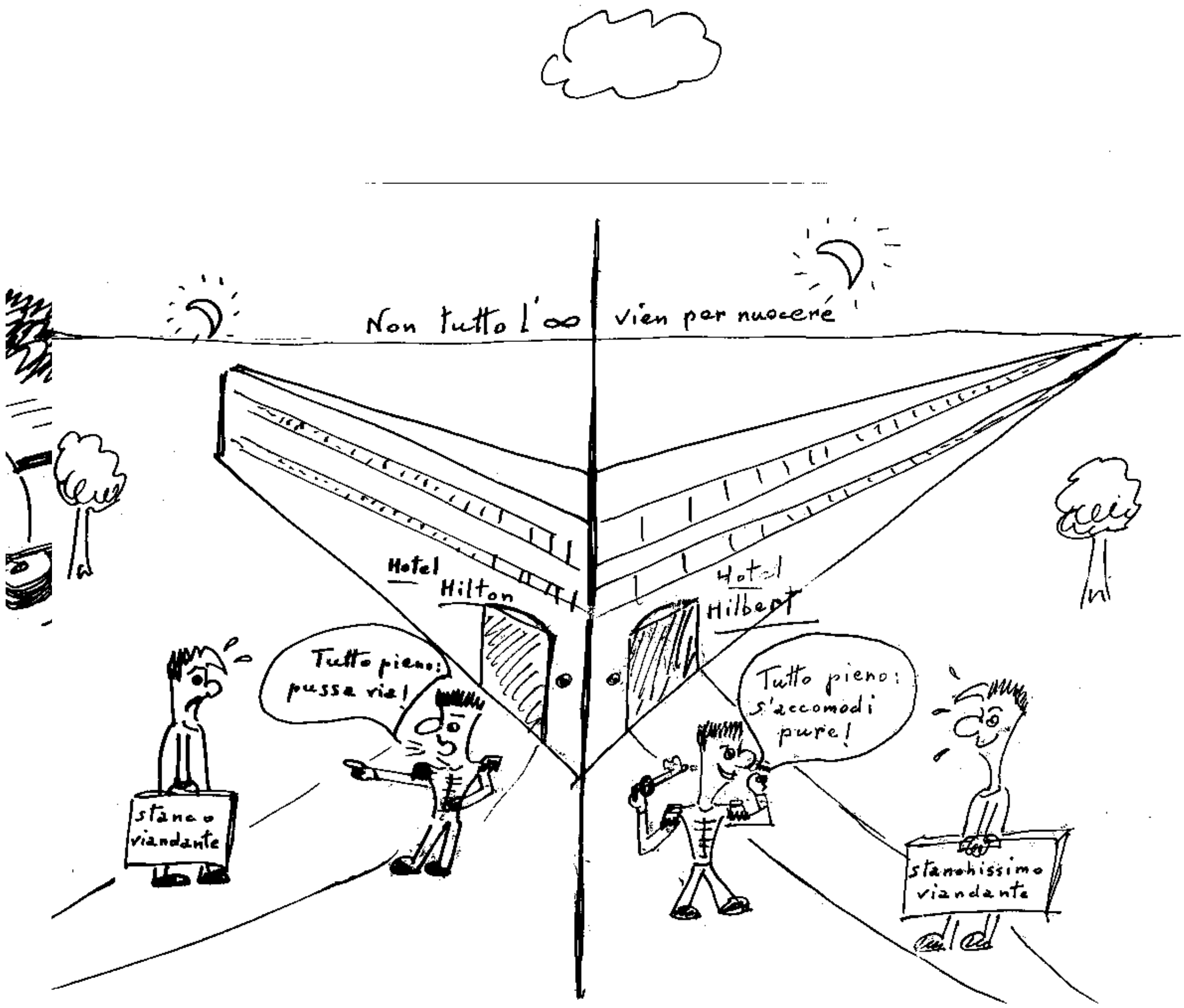
Si apre perciò il problema della *continuità della retta* (cioè della continuità dei *numeri reali* (che possiamo in prima istanza considerare come l'unione dei razionali con gli irrazionali).

3.4 Euclide e Hilbert

Anche il celebre *quinto postulato di Euclide* era connesso con il concetto di *infinito potenziale*.
Finché si tratta di rette incidenti in un punto, ci si può riferire a una porzione limitata di spazio attorno al punto stesso, ma il concetto di parallelismo tra due rette implica la necessità di prolungare la retta di Euclide (considerata come segmento) indefinitamente.

L'Hotel Hilbert: David **Hilbert** (Germania,1862-1943), il grande matematico che diede un grande contributo alla *teoria assiomatica degli insiemi*, usa una divertente metafora per illustrare il concetto di insieme infinito, che ha proprietà assolutamente dissimili dal finito.

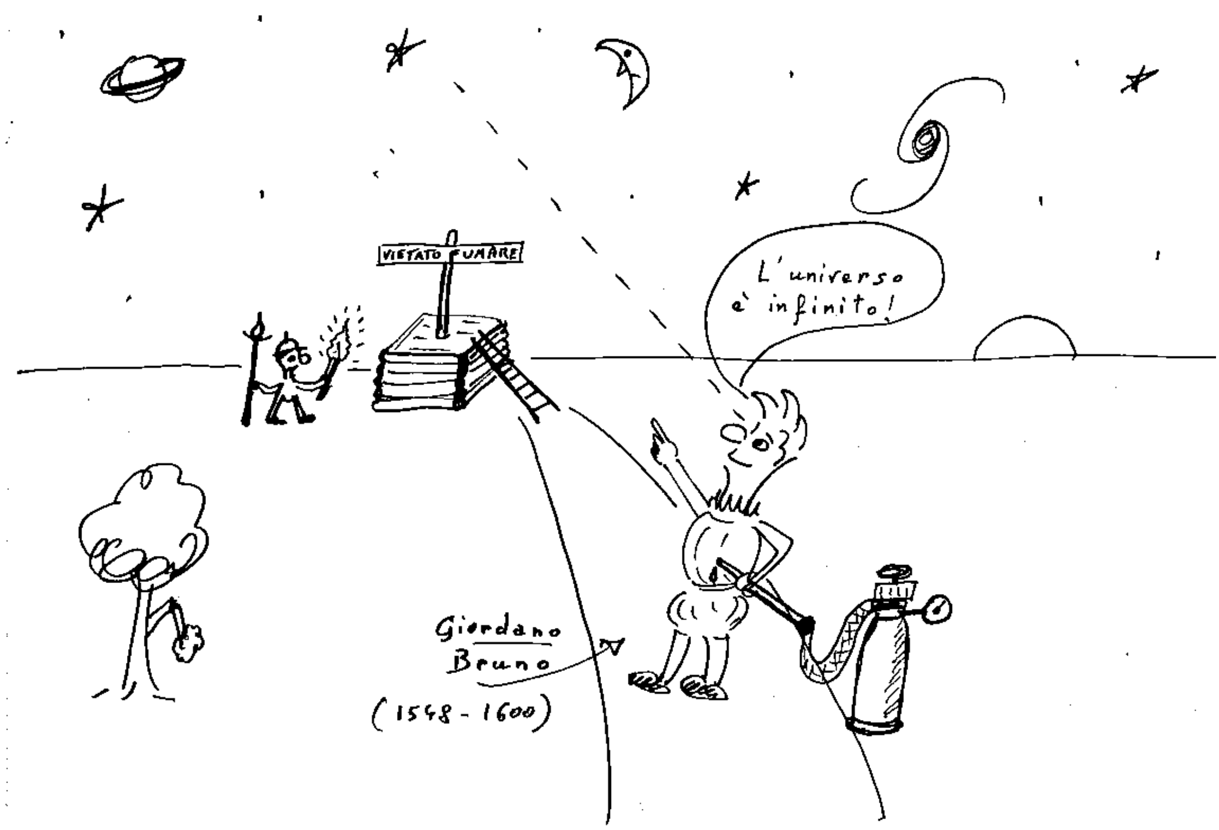
Se un Hotel reale (che dispone di un numero finito di stanze), diciamo l'Hotel Hilton, è al completo, una persona che si presenta a chiedere una stanza non troverà posto, ma in un Hotel con un numero infinito di stanze, diciamo l'Hotel Hilbert, una persona troverà sempre posto anche se tutte le stanze sono occupate: basta spostare la persona della stanza n°1 nella stanza n°2, quella della n°2 nella n°3 e così via.



4. INFINITI CANTORIANI (Gli "Aleph")

4.1 Gli insiemi numerici

Dato che l'insieme N dei numeri naturali può considerarsi un sottoinsieme proprio dell'insieme Z dei numeri razionali, e Z un sottoinsieme proprio dell'insieme R dei numeri reali (anche se a rigore non è così



semplicemente, ma tramite degli *isomorfismi*), sorge la:

I^ domanda: *N, Z e R sono equipotenti?* (cioè "equinumerosi"?).

Se la risposta non fosse affermativa, ciò implicherebbe l'esistenza di *diversi tipi di infinito*, alcuni più "grandi" di altri.

Il quesito precedente si generalizza così nel seguente:

<u>II^ domanda</u>: *Esistono insiemi infiniti di diversa "numerosità" (non equipotenti) ?*

Georg Cantor con la moglie.

(Fumetti: Par. XXXIII ; 80-81 – XXVII; 98-99)).

Che tutti gli insiemi infiniti fossero equipotenti (cioè che esistesse un solo "tipo" di infinito), è stata la convinzione di tutti i matematici e filosofi dall'antichità fino a Cantor.

4.2 <u>Gli infiniti numerabili</u>.

Le risposte alle domande del paragrafo precedente vennero date da **Cantor**, nell'ambito della sua *teoria degli insiemi transfiniti*.

Alla I^ domanda egli rispose dimostrando che:

L'insieme dei numeri razionali è equipotente all'insieme dei numeri naturali.

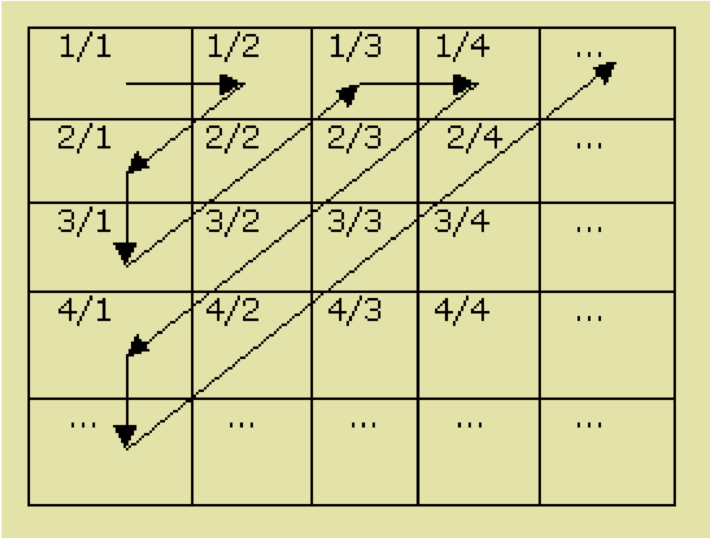
Questo può sembrare sorprendente, soprattutto se abbiamo presente la rappresentazione dei numeri su di una retta: mentre tra due numeri naturali successivi (che appaiono come punti a distanza finita) non esiste nessun altro.punto naturale, non si può invece parlare di numeri razionali successivi: tra due numeri (punti) razionali, per quanto vicini, ne esistono sempre infiniti altri. L'infinito dei numeri razionali sembrerebbe quindi "molto più numeroso" di quello dei naturali.

Ma abbiamo visto che l' "equinumerosità" tra insieme infiniti ha il significato di equipotenza: due insiemi infiniti sono ugualmente "numerosi" (cioè sono infiniti dello "stesso tipo") se possiamo trovare una legge che li ponga in corrispondenza biunivoca.

<u>*Dimostrazione*</u>: Cantor considera la seguente matrice (tabella) a infinite righe e infinite colonne: nella prima riga poniamo in successione tutte le frazioni del tipo

1/1, 1/2 , 1/3, 1/4, ...; nella seconda quelle del tipo 2/1, 2/2, 2/3, 2/4 ..., nella terza 3/1, 3/2, 3/3, ¾, ... e così via. La matrice conterrà quindi tutte le possibili frazioni.

Ora seguiamo un percorso a zig-zag come quello indicato in figura:



Ordiniamo quindi le frazioni della matrice secondo l'ordine del percorso: otterremo una successione infinita contenente tutte le possibili frazioni (quindi tutti i possibili numeri razionali):

1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3, 1/4, 2/3, ...

(Abbiamo qui considerato solo i razionali positivi, ma potremmo considerare ugualmente i razionali positivi e negativi)

Ma *ordinare* un insieme secondo una successione significa stabilire una legge di corrispondenza biunivoca che faccia corrispondere ad ogni numero naturale un elemento dell'insieme: nel nostro caso a 1 associamo il primo elemento della successione (1/1), a 2 il secondo elemento (1/2), a 3 il terzo (2/1) e così via.

Abbiamo perciò stabilito una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e quello delle frazioni (di cui, a rigore, quello dei numeri razionali può essere considerato un sottoinsieme): i due insieme sono quindi equipotenti, con lo stesso numero infinito di elementi.

Più correttamente:

L'insieme dei numeri naturali e quelli dei numeri razionali hanno la stessa potenza !

Cantor dimostrò che anche ***l'insieme dei <u>numeri algebrici</u> ha la stessa potenza dei naturali.***

(*I* ***numeri algebrici*** *sono tutti quei numeri che sono soluzioni di un'equazione polinomiale intera a coefficienti razionali*.

I numeri algebrici comprendono quindi tutti i numeri razionali – interi e frazionari – in quanto, detto r uno di essi, è soluzione dell'equazione di primo grado x-r=0. Ma comprendono anche un'infinità di numeri irrazionali, come √2, che è una soluzione dell'equazione x^2-2=0. Tutti gli altri numeri irrazionali sono detti **trascendenti**.)

La potenza dell'insieme dei numeri naturali è la minore possibile per insiemi infiniti (l'infinito "più piccolo" possibile) e si indica con il simbolo $\aleph_0$. Il simbolo ℵ (aleph) rappresenta la prima lettera dell'alfabeto ebraico.
Di un *infinito con potenza* $\aleph_0$ (cioè *equipotente a quello dei numeri naturali*) si dice anche che ha **potenza del discreto** (con riferimento alla successione dei numeri naturali, che è discreta, cioè con distanza finita tra uno di essi e il suo successivo). Oppure si dice che è un **infinito numerabile**.

4.3. <u>Gli infiniti non numerabili</u>.

Ma Cantor risponde pure alla seconda domanda ('*esistono insiemi infiniti di diversa "numerosità" , cioè non equipotenti?'),* dimostrando che:
l'insieme dei numeri reali (o meglio, degli *irrazionali trascendenti*, che ne sono un sottoinsieme) **è di potenza superiore a quella dei razional**i (e quindi dei naturali).
In termini più intuitivi, *i numeri reali sono un infinito "più numeroso" dei razionali.*

Riportiamo qui la *dimostrazione* del teorema precedente, poiché è di una stupefacente semplicità. Non confronteremo l'insieme dei numeri naturali con quello di tutti i punti di una retta, ma tutti i punti del segmento [0-1], che , come vedremo più avanti è un insieme equipotente alla retta.

La *Dimostrazione* si può fare *per assurdo*:
Supponiamo che l'insieme dei numeri reali del segmento [0-1] sia equipotente con quello dei numeri naturali. Ciò significa che si possono porre in corrispondenza biunivoca.

Avremo quindi la seguente associazione a coppie:

1 $\leftrightarrow$ $0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15} \ldots$

2 $\leftrightarrow$ $0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25} \ldots$

3 $\leftrightarrow$ $0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35} \ldots$

dove i simboli a_{ij} (a_{11}, a_{12}, ...) sono cifre decimali con valore da 0 a 9. Abbiamo così associato ad ogni numero naturale un numero reale, espresso in forma decimale, dell'intervallo [0-1] e viceversa. Quelli irrazionali naturalmente conterranno un numero illimitato do cifre decimali. Nessun numero reale della colonna di destra è uguale a un altro della stessa colonna, altrimenti la corrispondenza non sarebbe biunivoca.
Ora consideriamo il numero reale irrazionale r_1 così composto (in forma decimale illimitata):

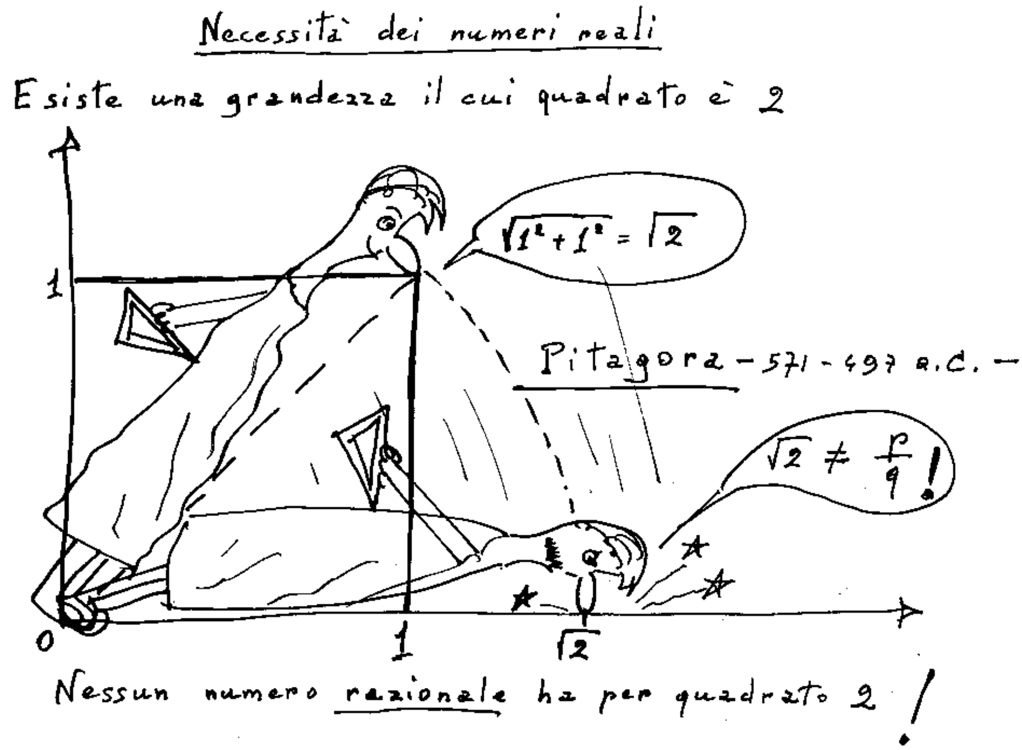
$$r_1 = 0, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \ldots$$

(è cioè costruito considerando come sua prima cifra decimale il primo del primo numero della colonna di destra, come seconda laseconda del secondo numero, ec.).
Esso per ipotesi farà parte dell'insieme dei numeri reali della colonna di destra.
Consideriamo ora un altro numero decimale illimitato r_2:

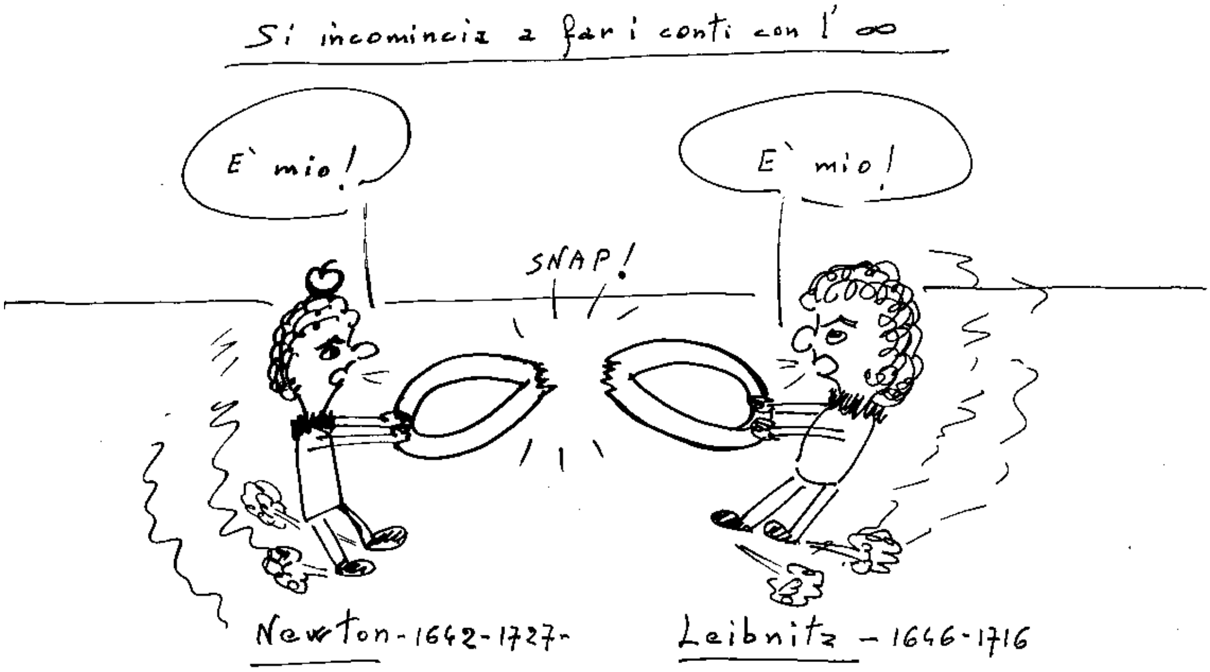
$$r_2 = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$$

(ove al solito b_1 b_2 b_3, ecc. denotano le sue cifre decimali), che soddisfi alla condizione:

$b_1 \neq a_{11}$; $b_2 \neq a_{22}$; $b_3 \neq a_{33}$; $b_4 \neq a_{44}$; ecc.: in generale: $b_n \neq a_{nn}$;



Ma allora il numero r_2 differirà non solo da r_1, ma anche da qualsiasi numero reale della tabella di destra: dal primo perché differisce almeno per la 1^ cifra decimale, dal secondo perché differisce almeno per la 2^ cifra decimale, ecc. Quindi abbiamo trovato almeno un numero reale che non è contenuto nella tabella di corrispondenza biunivica: vale a dire che la corrispondenza supposta biunivoca tra l'insieme dei naturali e l'insieme dei reali compresi in [0;1] in realtà non è tale, poiché ne è rimasto escluso almeno un reale (e



quindi, è facile dimostrarlo, infiniti).

Quindi *l'insieme di tutti i numeri reali dell'intervallo [0;1], e quindi di tutti i numeri reali tout court, ha potenza superiore a quella del discreto.*

La potenza dell'infinito dei reali viene indicata con il simbolo $\aleph_1$ (o anche con **C**). E' detta anche **potenza del continuo** (con riferimento al fatto che i numeri reali sono rappresentati da tutti i punti di una retta) e il relativo infinito viene detto **infinito non numerabile.**

Se *l'insieme R dei numeri reali ha potenza del continuo*, tale è anche la potenza dell'insieme di tutti i punti della retta (che può infatti essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri reali).

Si dimostra facilmente (vedi Fig.1) che *esso è equipotente anche con l'insieme dei punti di un segmento* (ad es, il segmento 0-1).

Dimostrazione: Se consideriamo un segmento di lunghezza arbitraria (ad es. 1) "piegato" in modo da costituire una semicirconferenza (AB), dal suo centro si possono tracciare i segmenti che incontrano i punti P_1, P_2, P_3, ecc. sulla semicirconferenza e quelli corrispondenti P_1', P_2', P_3', ecc. sulla retta r: si è così stabilita una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti della semicirconferenza e tutti i punti della retta r.

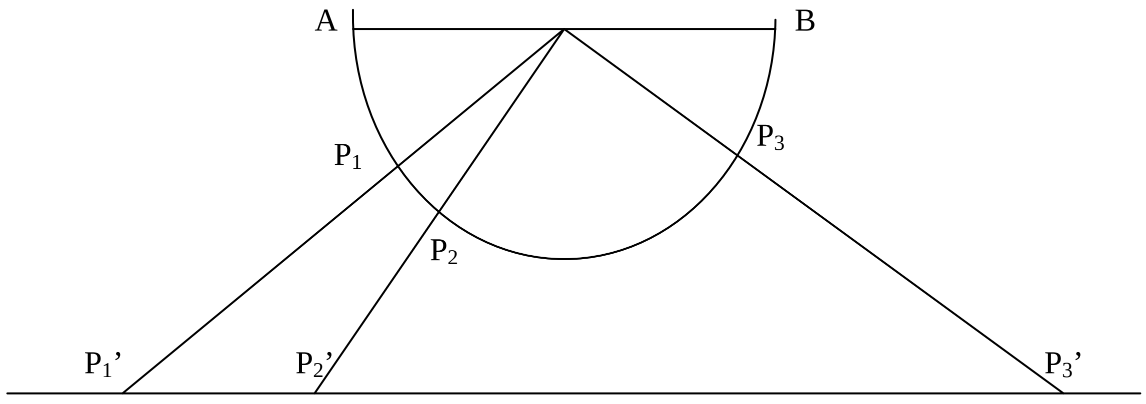


Fig.1

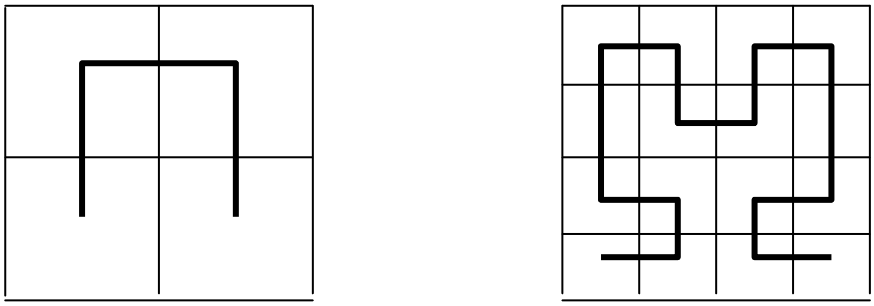


Fig. 2a **Fig.2b**

Quindi: *c'è lo stesso "numero" di punti in una retta e in un segmento* (benché la prima sia illimitata e il secondo limitato).

Hilbert si è chiesto che relazione ci fosse tra la potenza dell'*insieme dei punti di un segmento* (e quindi di una linea qualsiasi) e *quello dei punti di una superficie* (ad es. di un quadrato): egli dimostrò facilmente (vedi Fig.2) che *hanno la stessa potenza* $\aleph_1$.

Consideriamo il quadrato di Fig.2a: esso si può suddividere in quattro quadrati uguali e tracciare la spezzata a tre lati. Poi suddividiamo ognuno dei quattro quadrati di Fig.2a a sua volta in quattro quadrati e tracciamo la spezzata mostrata in Fig.2b. Procedendo all'infinito la spezzata diverrà infinita (assimilabile a una retta) e ogni suo punto sarà anche un punto del quadrato di partenza, mentre per ogni punto del quadrato passerà la spezzata. Abbiamo quindi stabilito una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti del quadrato e tutti i punti della retta.

Analogamente per gli insiemi costituiti dai punti di uno *spazio a numero qualsiasi di dimensioni* (anche infinite, purché numerabili ! ...): ognuno di essi è equipotente all'insieme dei punti di una retta, cioè ha la *potenza del continuo* !

4.4. Le questioni sugli infiniti cantoriani.

Siamo così giunti, con Cantor, alla scoperta che "*non tutti gli infiniti sono uguali*", che esistono infiniti di potenze diverse.

Le **questioni** successive sono le seguenti:

A) Esistono insiemi infiniti con potenza superiore a quella del continuo?

B) Esistono insiemi infiniti con potenza intermedia tra $\aleph_o$ e $\aleph_1$?

Le risposte ai due quesiti sono di natura ben diversa.

III.4.5. L'algebra cantoriana dei transfiniti

Alla prima delle due questioni precedenti Cantor rispose affermativamente. Egli dimostrò che dato un insieme infinito di potenza $\aleph_0$, *l'insieme delle sue parti* (vale a dire *l'insieme di tutti i suoi possibili sottoinsiemi propri*, sia finiti che infiniti, vedi pag. seguente) *ha potenza* $\aleph_1$.

E, generalizzando: *l'insieme delle parti di un insieme di potenza* $\aleph_n$ *è sempre di potenza superiore a* $\aleph_n$ (ad es.: l'insieme delle parti di $\aleph_1$ è di potenza $\aleph_2$. Un esempio di insieme con potenza $\aleph_2$ è dato dall'*insieme di tutte le funzioni a numero qualsiasi di variabili*).

Quindi:

Esistono infinite potenze di insiemi infiniti.

Cantor sviluppò un'***algebra*** *delle potenze degli insiemi infiniti*, o dei **numeri transfiniti** a partire da un sistema di definizioni e di assiomi.

Portiamo qui di seguito qualche esempio:

$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1$

$\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_1 + n = + \aleph_0 = \aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$

$\aleph_0 \bullet n = \aleph_0 \bullet \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_1 \bullet n = \aleph_1 \bullet \aleph_0 = \aleph_1 \bullet \aleph_1 = \aleph_1 \qquad (n \neq 0)$

$\aleph_0^{\,n} = \aleph_0 \; ; \; \aleph_1^{\,n} = \aleph_1 \qquad (n \neq 0)$

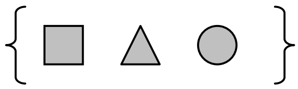
$n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad (n \geq 2)$

Le scoperte di Cantor suscitarono grande scalpore nella comunità matematica del suo tempo. Quasi tutti i grandi matematici (ad eccezione di Richard Dedekind [Germania,1831-1916], i cui lavori costituirono i punti di partenza per Cantor, e pochi altri) rifiutarono le sue idee, ritenute dai più favorevoli troppo audaci e dagli altri accolte come farneticazioni che poco avevano a che fare con la "vera" matematica.

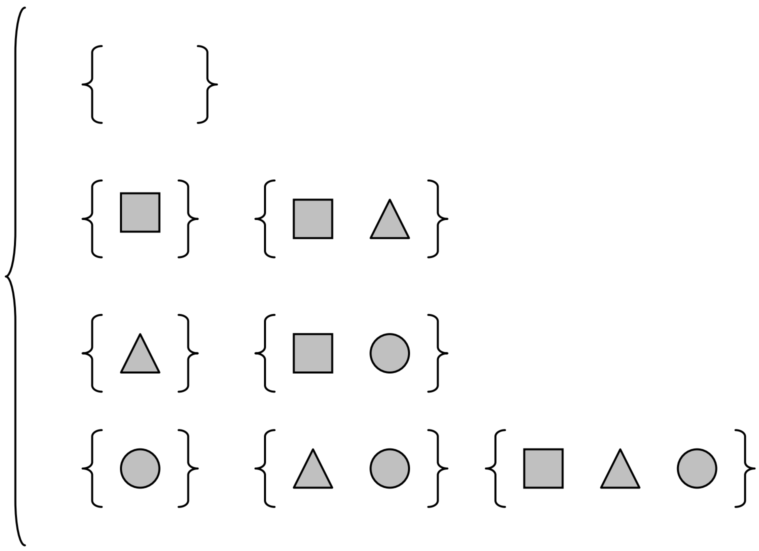
INSIEME DELLE PARTI

A è un insieme, $\mathbf{2^A}$ è l’insieme di tutti i suoi sottoinsiemi.
Se **a** è il numero di elementi di **A**, $\mathbf{2^a}$ è il numero di elementi di $\mathbf{2^A}$

A:



2^A :



Cantor venne ritenuto per lo più un geniale visionario. Gli attacchi di alcuni eminenti colleghi, **Kroenecker** in testa, furono a volte così violenti, anche se non in mala fede, che incisero drammaticamente sulla sua vita e sul suo equilibrio psichico: la sua spiccata sensibilità non resse al disconoscimento da parte della comunità scientifica e visse i suoi ultimi anni entrando e uscendo dalle cliniche psichiatriche.

III.5. ANTINOMIE E PROBLEMI DOPO CANTOR

III.5.1. L'ipotesi del continuo

Alla seconda questione (*se esistano insiemi con potenza compresa tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$*) era più difficile rispondere**:** quando le idee di Cantor iniziarono finalmente ad affermarsi, negli ultimi anni del secolo, era opinione diffusa che non esistessero insiemi infiniti con potenza compresa tra il discreto e il continuo, ma nessuno l'aveva ancora dimostrato.

Essa è conosciuta anche come **ipotesi del continuo**.

La questione non è solo astratta: essa ha implicazioni fondamentali sulla struttura dei numeri razionali e di quelli reali (oltre che dei complessi) e quindi sulla struttura della maggior parte delle matematiche.

Ci furono molto tentativi di dimostrare l'ipotesi del continuo a partire dagli assiomi che Cantor aveva posto alla base della sua teoria degli insiemi transfiniti.

L'epilogo di questa ricerca si ha solo nel 1963 e fu un epilogo sorprendente, anche per l'analogia con la questione che portò alla scoperta delle *geometrie non euclidee*.

Nel frattempo la teoria cantoriana aveva dato nuovi stimoli alla riflessione sugli insiemi infiniti e quindi in generale sui fondamenti della matematica tutta.

III.5.2. La teoria "ingenua" degli insiemi e il paradosso di Russell

Dalla rivoluzione cantoriana e dalla rinnovata sensibilità verso la necessità di rivedere criticamente i fondamenti logico-formali delle matematiche emersero i tentativi di inquadrare queste ultime in rigorose **teorie assiomatiche**.

- Richiamiamo qui, con brevi cenni, il concetto di *sistema assiomatico*:

Sistema assiomatico: fondato su un insieme di *concetti primiti*vi "definiti" indirettamente e collettivamente da un insieme di *assiomi* che ne postulano le proprietà. Tutte le proprietà di tutti i concetti derivati da quelli primitivi (enti del sistema) devono essere dimostrabili a partire dagli assiomi (mediante l'assunzione di *regole di inferenza*, o schemi di ragionamento in accordo con i principi della logica) e costituiscono dei *teoremi*.

Un **sistema assiomatico "perfetto"** deve essere:

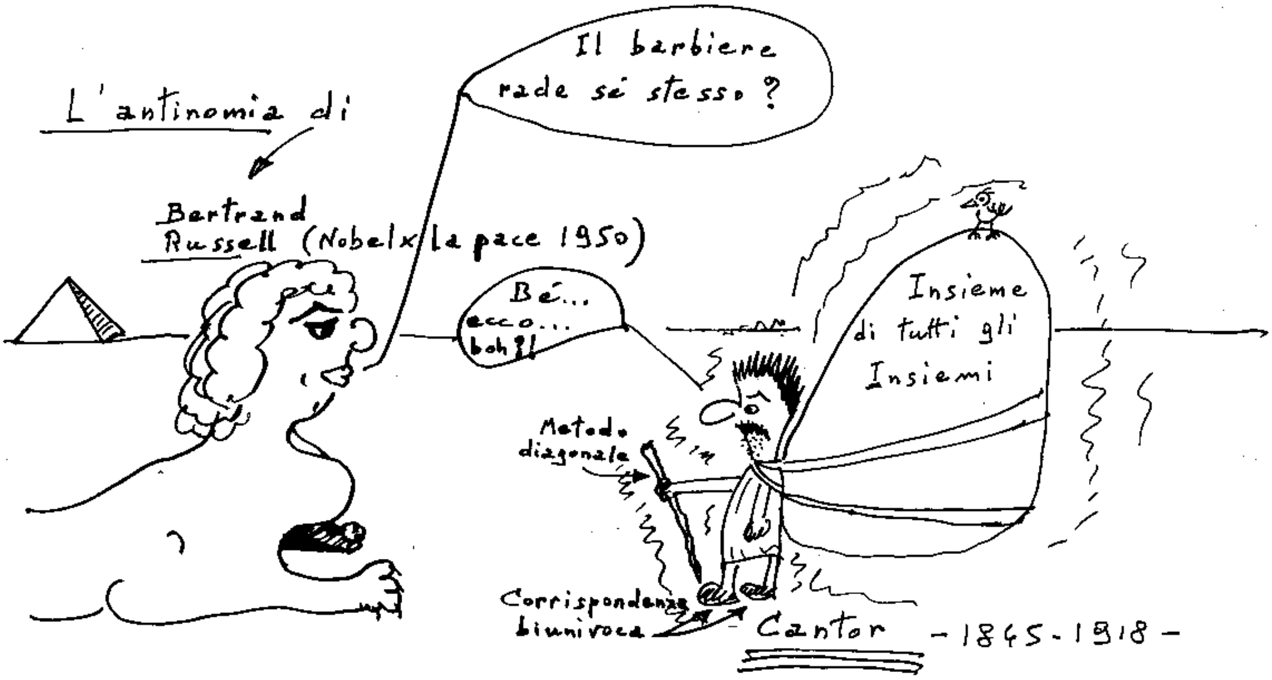
1. <u>*Non contraddittorio*</u>

   Nessun assioma deve essere in contraddizione con gli altri e nessun teorema da essi dedotto deve essere in contraddizione con gli assiomi e quindi con gli altri teoremi).
2. <u>Completo</u>

   Ogni proprietà vera per enti del sistema deve essere deducibile dagli assiomi.

   Vedremo come la convinzione che tutte le branche della matematica potessero configurarsi in sistemi assiomatici perfetti si rivelerà illusoria.

L'assiomatizzazione delle matematiche comportava una ben fondata teoria degli insiemi ,come elemento comune. Il primo tentativo moderno fu compiuto da Gottlob **Frege** (Germania, 1848-1925))
Ma l'impresa si arrestò di fronte ad una obiezione presentata, nel 1902, dal giovane Bertrand **Russell** (Galles, 1872-1970!), che dimostrò come la teoria degli insiemi da poco fondata portasse a un paradosso di grande rilevanza:



<u>Esistevano insiemi che era impossibile *ben definire*</u>: erano cioè tali che un elemento particolare apparteneva all'insieme solo se non vi apparteneva ! Il che costituiva una palese violazione del principio di non contraddizione.
Russell illustrò divulgativamente tali tipi di insieme con delle storielle, note come il **paradosso del barbiere** e quello del **catalogo dei cataloghi.**

<u>*Paradosso del barbiere*</u>**:** Il barbiere (b) di un villaggio fa la barba a tutti gli abitanti maschi che non se la fanno da sé. (Consideriamo quindi l'insieme A degli abitanti maschi del villaggio ripartito nei due sottoinsiemi, B e S di coloro che si fanno radere dal barbiere (B) e di coloro che si radono da soli (S). quindi ogni elemento di A o appartiene a B o a S, ma non a entrambi. B e S sembrerebbero insiemi *ben definiti*.
<u>Domanda</u>: *A quale dei due sottoinsiemi appartiene il barbiere?*
<u>Risposta</u>: a) Il barbiere appartiene a B: quindi per definizione egli si fa radere dal barbiere. Ma allora il barbiere si rade da sé, quindi appartiene a S.
b) Il barbiere appartiene ad S. quindi per definizione egli si rade da sé. Ma allora si fa radere dal barbiere e quindi appartiene a B.

In sintesi: il barbiere appartiene a ognuno dei due insiemi solo se non vi appartiene.
Siamo dunque nel caso che dato un elemento (b) *non sappiamo decidere* se appartiene o non appartiene a B o a S., perché *qualunque scelta porta a una contraddizione.*

Paradosso del catalogo dei cataloghi

Una biblioteca (finita, come le normali biblioteche, o infinita, come quella di Borges) è suddivisa in varie sezioni. In ogni sezione c'è un catalogo dei volumi presenti. Data la vastità della biblioteca, il bibliotecario decide di approntare un catalogo che elenchi i cataloghi della biblioteca (il catalogo dai cataloghi). Ma si accorge che alcuni dei cataloghi di sezione contengono se stessi nell'elenco dei volumi della sezione, mentre altri no. Allora decide di approntare due cataloghi (insiemi) dei cataloghi: uno (A) contiene (come elementi) i cataloghi che contengono in elenco anche se stessi, l'altro (B) contiene i cataloghi che non contengono se stessi. A e B, essendo dei cataloghi, devono essere contenuti in A o in B.
Domanda: il catalogo (insieme) B appartiene a A o a B?

Risposta:

a) B appartiene a B. Ma allora B contiene se stesso come elemento e quindi dovrebbe appartenere ad A.

b) B appartiene ad A. Ma allora B è un insieme che contiene se stesso come elemento, che è contraddittorio con la sua definizione.

L'esempio è equivalente a quello del barbiere.

III.5.3 La teoria assiomatica degli insiemi

Apparve chiaro che in una corretta teoria degli insiemi si dovevano dare definizioni e proprietà per gli insiemi che escludessero insiemi "patologici", come quelli citati, ad es. insiemi che contenessero se stessi come elementi, come "*l'insieme di tutti gli insiemi*".

Quest'ultimo in particolare aveva già posto Cantor di fronte a un paradosso: è ragionevole pensare che **l'insieme di tutti gli insiemi** possibili abbia la potenza massima, ma avrà comunque una potenza, diciamo $\aleph_k$. Per definizione conterrà anche *l'insieme delle sue parti*: ma, come lo stesso Cantor aveva dimostrato, quest'ultimo avrà potenza maggiore di $\aleph_k$.

Questo non solo prova che non esiste un insieme di potenza massima, ma pone il fatto paradossale che l'insieme di tutti gli insiemi contiene come elemento un insieme di potenza ad esso maggiore!

Russell ed altri riformarono quindi in questo senso la precedente teoria cantoriana degli insiemi (detta da allora anche **teoria ingenua degli insiemi**), con la cosiddetta **teoria dei tipi,** dove i tipi di insiemi venivano gerachizzati in categorie per cui si ponevano dei "paletti" tali da evitare il sorgere di paradossi.

Fu il grande matematico David **Hilbert** (Germania, 1862-1943) il principale artefice di una completa e rigorosa **teoria assiomatica degli insiemi**, nella quale i paradossi russelliani non avevano luogo.
A partire da questa e quindi dalla teoria cantoriana, ormai al riparo da fondamentali contraddizioni, Hilbert si accinse alla grande opera di inquadrare tutta la matematica, a partire dall'aritmetica e dalla geometria, in rigorosi *sistemi assiomatici "perfetti*".
Hilbert ebbe a scrivere:
"*Nessuno ormai può più scacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi!*".

Pochi anni dopo avrebbe constatato che in ogni paradiso il serpente è sempre in agguato, come l'angelo vendicatore pronto a scacciarci !
Infatti un altro grosso "guaio" stava per abbattersi sui sistemi assiomatici.

David Hilbert

(Königsberg, Prussia [ora Kaliningrad, Russia] : 1862 – Göttingen, Germania : 1943)

III.6. I PROBLEMI APERTI DOPO HILBERT

III.6.1. ***L' ipotesi del continuo e l'assioma di libera scelta.***

Richiamiamo il *secondo quesito* posto nel paragrafo 2.4.4, cioè *se fosse o meno valida* **l'ipotesi del continuo** (*non esiste nessun insieme infinito di potenza compresa tra il discreto e il continuo*), che d'ora in poi indicheremo con **IP**.
Si dimostra che tale ipotesi è equivalente ad un'altra, conosciuta come **l'assioma di libera scelta** (d'ora in poi indicato come **ALS**), formulato da Ernst **Zermelo** (Germania, 1871-1956) n3l 1904.

Abbiamo visto come un insieme infinito si possa definire solo in modo *sintetico*, enunciando una proprietà comune a tutti e soli gli elementi dell'insieme.
Domanda: E' lecito considerare un insieme di infiniti oggetti senza enunciare la proprietà caratteristica dei suoi elementi, in altre parole senza regola specifica di definizione? Ad es. un sottoinsieme proprio dei razionali non meglio specificato.
L'ALS afferma che è possibile. Esso è equivalente ad affermare che:

Assioma di libera scelta: "Data una classe di infiniti insiemi è possibile scegliere un elemento da ciascuno di essi senza dare un'esplicita regola di scelta".

Tralasciamo qui, perchè troppo complesso, le importanti connessioni del problema a un altro principio, quello del "Buon ordinamento"
Si dimostra che:
Se vale l'ALS, allora vale anche l'IC.
In altre parole: **L'assioma di libera scelta e l'ipotesi del continuo sono equivalenti** (sussistono insieme e ciascuno è dimostrabile a partire dall' altro).

Cantor aveva costruito un imponente e astratto edificio dove *gli insiemi infiniti erano confrontabili*: aveva stabilito che esistevano insiemi di potenze uguali o diverse e quali erano maggiori o minori.

Chiedersi se l'ALS è valido significa rispondere alla domanda se esistono insiemi di potenza intermedia tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$ e, in generale, tra $\aleph_n$ e $\aleph_{n+1}$.

La sofisticata teoria assiomatica di Hilbert lasciava quindi dei **problemi aperti**:

1) **E' possibile costruire dei sistemi assiomatici "perfetti" ?** (E quindi assiomatizzare rigorosamente tutta la matematica? A quel tempo, anni venti del sec. XX, Hilbert e tutta la comunità matematica erano assolutamente convinti di sì).
2) **E' dimostrabile la validità dell' ALS?**
3) **Esistono insiemi infiniti non confrontabili?** (Cioè insiemi infiniti tali che non possiamo stabilire l'uguaglianza o la disuguaglianza delle loro potenze? Vale a dire, in parole povere, se uno è "più numeroso", "ugualmente numeroso" o "meno numeroso" dell'altro?)

Il terzo problema è strettamente correlato con il secondo. Infatti si può dimostrare che:

"Se due insiemi possiedono un buon ordinamento, allora sono confrontabili".

Ma , come accennato, **se vale l'ALS allora si dimostra che *tutti* gli insiemi possiedono un buon ordinamento e quindi che *tutti gli insiemi sono confrontabili.***

I problemi aperti rimanevano quindi il primo e il secondo.

Il primo fu risolto da **Kurt Gödel** (Austria, 1906-1978) , col suo celebre *teorema* del 1931, ma la soluzione fu sorprendente e scacciò Hilbert dal suo paradiso cantoriano !

III.6.2 <u>Il teorema di Gödel</u>

Molto sinteticamente, il **teorema di Gödel** affermava che: *All'interno di un sistema assiomatico, quale quello dell'aritmetica, a cui si possono ricondurre tutte le matematiche, esistono proposizioni vere, ma non dimostrabili a partire dagli assiomi*. quindi *<u>non decidibili</u>* all'interno del sistema.

Si dimostra cioè che per esse non è dimostrabile se siano vere o false all'interno del sistema in cui sono state costruite.

Ciò implica che il sistema assiomatico non è completo.

Lo scoglio può superarsi se si amplia il sistema introducendo nuovi assiomi, con i quali si può dimostrare la verità della proposizione, ma allora esiste almeno un'altra proposizione indecidibile all'interno del nuovo sistema, e così via.

D'altra parte si dimostra che se un sistema assiomatico non contenesse proposizioni indecidibili, allora i suoi assiomi sarebbero contraddittori, cioè il sistema non sarebbe compatibile (e quindi si potrebbe da esso dedurre la verità di qualsiasi proposizione).

In conclusione, il **teorema di Gödel**, *oltre a dimostrare la possibilità di proposizioni indecidibili a priori*, *afferma che un sistema assiomatico non può essere ad un tempo completo e non contraddittorio (compatibile), cioè perfetto.*

Ma il **teorema di Gödel,** detto anche **teorema di incompletezza**, ha un *significato epistemologico* ancora più profondo: esso dimostra che *<u>ogni sistema assiomatico che sia riconducibile a quello dell'aritmetica, o che lo contenga è tale per cui è impossibile dimostrarne o meno la compatibilità "dall'interno", cioè come deduzione dagli assiomi del sistema stesso.</u>*

Ugualmente accade per la **logica**. Esso è organizzata come un sistema assiomatico. Ne deriva sostanzialmente che **non si può dimostrare la compatibilità della logica con gli strumenti della logica.**
Possiamo dedurre da tutto ciò *l'impossibilità di dimostrare che tutte le proposizioni vere sono tali* ! (Non ricorda l'impossibilità di considerare *l'insieme di tutti gli insiemi*?)

In termini meno rigorosi, ma più suggestivi**, il teorema di incompletezza** ci parla *dell'impossibilità che un sistema possa compiutamente "osservare" se stesso*, enunciandone tutte le verità che lo riguardano.
Noi possiamo affermare la compatibilità di un sistema assiomatico solo con argomentazioni "esterne" al sistema stesso, così come possiamo affermare l'autoconsistenza della logica solo con argomentazioni extra-logiche.

Questo ha dato un colpo definitivo al programma di Hilbert di assiomatizzare perfettamente tutta la matematica, il cui sistema di fondamenti rimane come sospeso per aria, in quanto sostanzialmente *incompleto*.

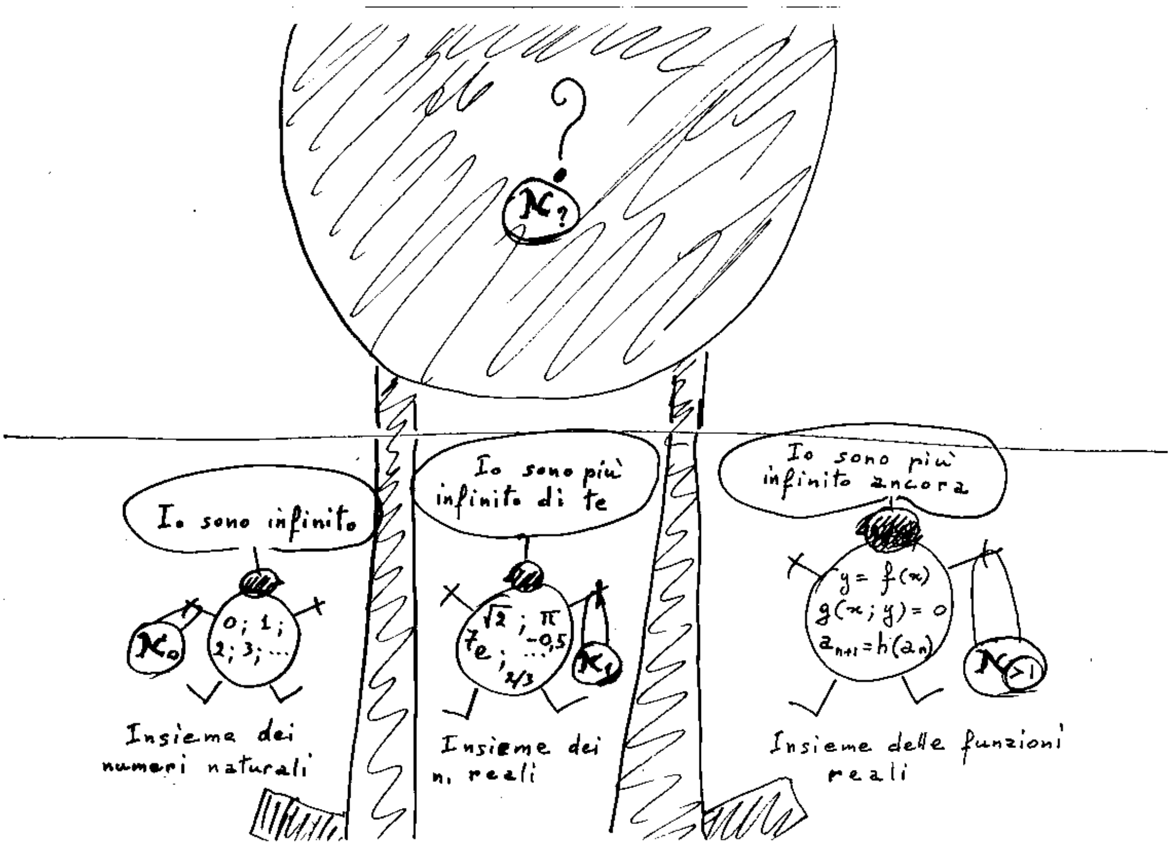
Non possiamo qui andare a fondo delle questioni connesse con questo "sconvolgente" teorema: concludiamo solo sottolinenado che non dobbiamo, a causa di Gödel, "buttare" la matematica, ma le sue verità rimangono a rigore con incerti ed evanescenti fondamenti.

*La dimostrazione del teorema di Gödel è estremamente lunga e complessa (*vedi "La prova di Gödel", Boringhieri) *ma per darne un'idea approssimativa potremmo considerare il seguente ragionamento:*
Sia S un sistema assiomatico del quale non sappiamo se sia logicamente compatibile (non contraddittorio) o no. Ciò significa che dedotta (in modo logicamente corretto) dai postulati di S una proposizione P, vi è il dubbio che

dagli stessi postulati si possa dedurre, altrettanto correttamente, la proposizione nonP.

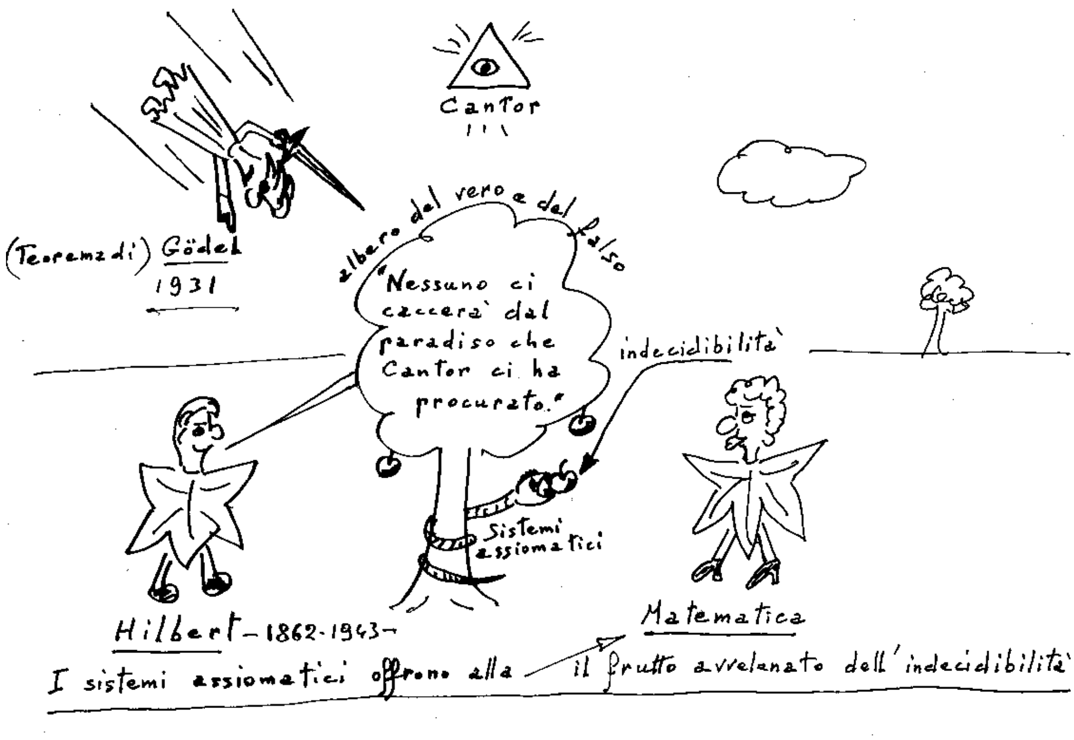
Ora supponiamo che dai postulati di S si sia dedotta la proposizione P che afferma che "S è logicamente compatibile": vi è il dubbio che possa anche dedursi che "S non è logicamente compatibile". Ma allora la supposta dimostrazione della compatibilità di S non è incontrovertibile e quindi non accettabile.

Le proposizioni di Gödel hanno una qualche similarità con quelle di Russell: sono *autoreferenziali*, perché si riferiscono alla propria dimostrabilità. La



struttura ricorda l'antico paradosso del mentitore ("la frase che sto dicendo è falsa").

Ma è’ importante sottolineare la profonda differenza tra le proposizioni russelliane e quelle Gödeliane: le prime sono indecidibili perché sia la loro affermazione che negazione sono contraddittorie, le seconde semplicemente perché non possiamo dimostrarne la verità all’interno del sistema assiomatico in cui sono costruite.



Mentre le proposizioni di Russell sono fondalmentamente *prive di senso*, quelle di Gödel hanno senso e potrebbero essere vere, ma non dimostrabili.

III.7. LE MATEMATICHE NON CANTORIANE

III.7.1. <u>Ancòra l'assioma di libera scelta</u>

In termini più specifici, il teorema di Gödel poneva un problema non indifferente riguardo al secondo problema: se fosse dimostrabile la verità dell'assioma di libera scelta.

Infatti ora *c'era la possibilità che l'ALS fosse indecidibile*, e che quindi esistessero infiniti non confrontabili.

Non possiamo qui dilungarci sul fatto che come conseguenza diverrebbero incompatibili i fondamenti di molte branche della matematica, quali l'analisi (teoria della misura) e la topologia.

Il problema fu risolto da Paul **Cohen** (U.S.A., 1934 -) molti decenni dopo (1963).

Precedentemente a lui si era invano tentato di dimostrare l'**ALS** a partire dagli altri assiomi della teoria di Hilbert.

Questo ricorda molto da vicino il problema connesso al famoso *quinto postulato di Euclide* (sulle rette parallele): dopo molti tentativi infruttuosi di dimostrarlo attraverso gli altri postulati, si dimostrò che era un assioma indipendente dagli altri. Poteva essere solo accettato o rigettato (in realtà sostituito con altri).

A seconda che fosse accettato o meno all'interno del sistema assiomatico della geometria, si aveva la *geometria eucli*dea oppure le *geometrie non euclidee*, queste ultime altrettanto "vere" , coerenti e autoconsistenti (se eliminiamo proposizioni "gödeliane") della prima.

III.7.2 Cohen: la soluzione !

Cohen dimostrò che:

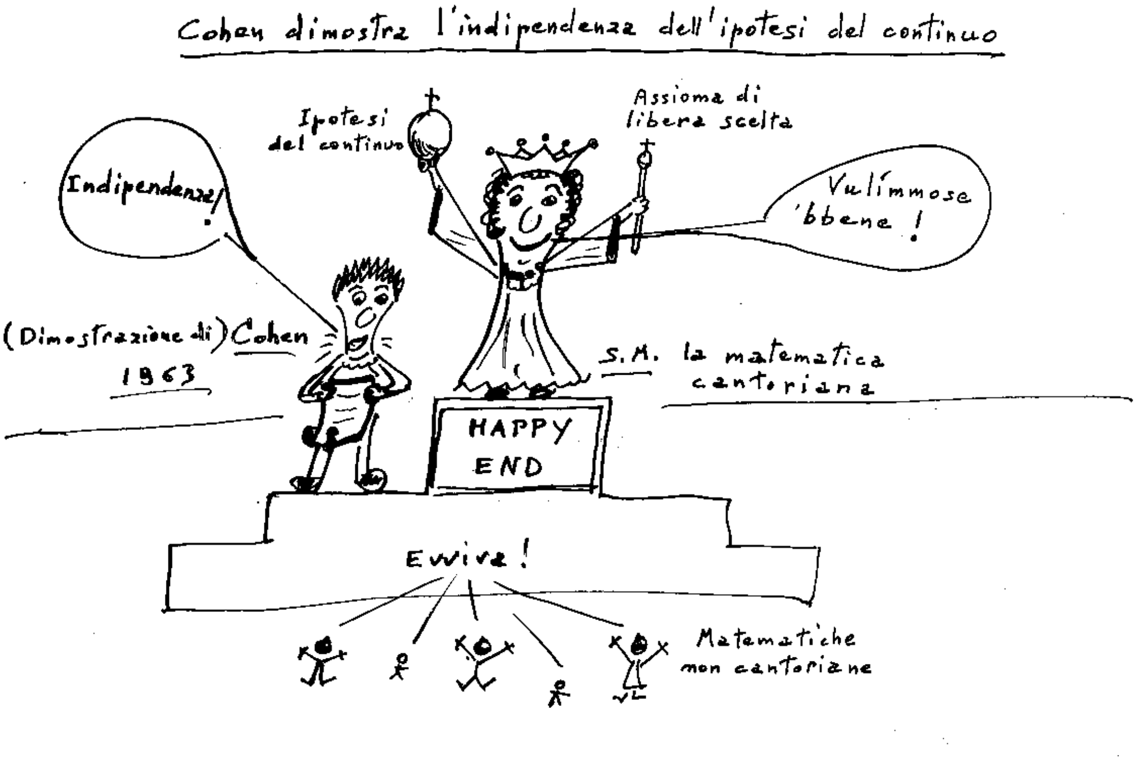
***L' assioma di libera scelta è un postulato indipendente dagli altri*.**

Se lo si accetta si ha una ***matematica cantoriana***, altrimenti una ***matematica non cantoriana*** (o più).

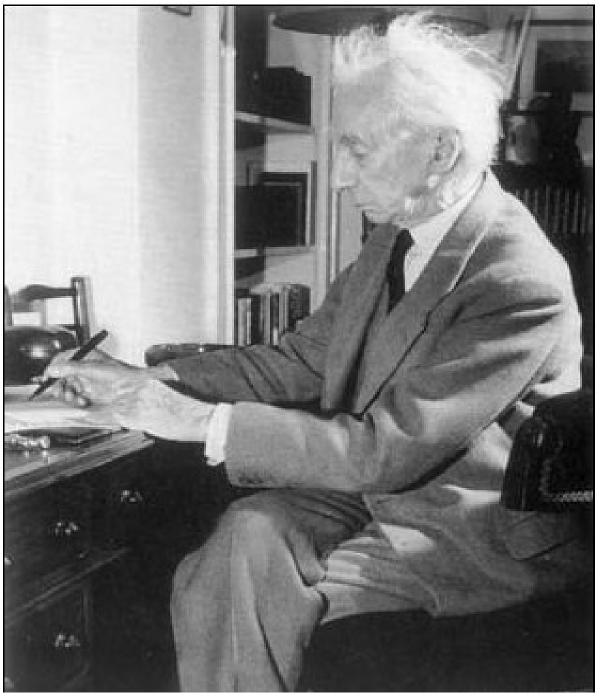
Ma accettare l'**ALS** significa *dimostrare la verità dell'ipotesi del continuo* e quindi **escludere che tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$ esistano altre potenze di infinito.**

Non potremo quindi avere, per es., nessun insieme numerico con "gradi di infinità" intermedi tra quelli dei numeri razionali e dei numeri reali.

Questo invece succede se rigettiamo l'ALS. Avremmo così una teoria degli insiemi numerici con alcune proprietà significative molto diverse da quelle ben note.

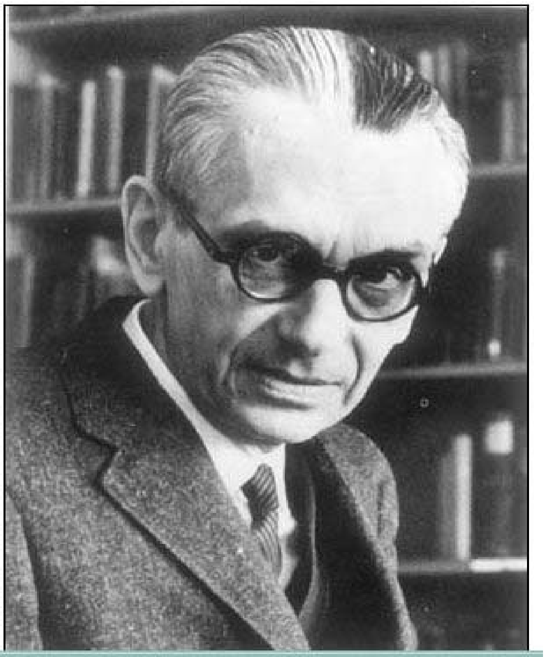


Bertrand Russell
(Ravenscroft, Galles: 1872 - Penrhyndeudraeth, Galles: 1970)



Giuseppe Peano
(Cuneo:1858 – Torino:1932)

Kurt Gödel
(Brünn [Brno], Imp. Austro-ung.1906 - Princeton, U.S.A.:1978)



Paul Cohen
(Long Branch, U.S.A.: 1934 -)

2.8. CONCLUSIONI.

Alla fine si è dunque arrivati a *rispondere* a tutte le domande fondamentali che ci eravamo posti:

1) Esistono insiemi infiniti di diversa potenza e non esiste limite alle potenze di insiemi infiniti costruibili mediante l'algebra di Cantor.

2) Le antinomie insite nella teoria "ingenua" degli insiemi di Frege e Cantor furono superate dalla rifondazione operata da Russell, Whitehead e Hilbert.

3) Rimane l'impossibilità, stabilita da Gödel, di avere sistemi assiomatici completi, all'interno dei qualise ne possa dimostrare la compatibilità.

4) L'assioma di libera scelta è risultato un postulato indipendente dagli altri. Una teoria assiomatica degli insiemi che lo includa allora prevede che:

a) Tutti gli insiemi possiedono un buon ordinamento (anche se di molti non lo conosciamo, ma sappiamo solo che esiste, come per i numeri reali!)

b) Tutti gli insiemi sono confrontabili

c) Non esiste nessun insieme con potenza intermedia tra il discreto e il continuo.

5) A seconda che si accetti o meno l'assioma di libera scelta avremo rispettivamente una matematica cantoriana o non cantoriana.

La ricerca sui fondamenti non si è arrestata a Cohen, poiché altri problemi si sono aperti nel frattempo, di natura troppo complessa e specialistica per questa sede.

- <u>Teoria “ingenua” degli insiemi</u>

(Cantor, dal 1874 al 1895)

PRINCIPALI PROBLEMI:

1.	Assioma di libera scelta	⟷	Ipotesi del continuo
2.	Contraddittorietà di: “Insieme di tutti gli insiemi”		Paradosso di Russell

- Teoria assiomatica degli insiemi

(Russell, Peano, Hilbert, Gödel, ecc.)

- Elimina il problema (2.)
- Rimane il problema (1.), con l’aggravante della possibile *indecidibilità.*

- <u>Dimostrazione dell’indipendenza dell’ipotesi del continuo dagli altri assiomi</u>

(Cohen, 1963)

- Risolve il problema (1.)
- Nascita delle Matematiche non cantoriane.