

Equazioni non lineari:  
metodi di iterazione funzionale

## EQUAZIONI NON LINEARI

Il problema di cui ci occupiamo nella lezione che sto per presentare è quello della ricerca degli zeri di una funzione non lineare di tipo polinomiale, logaritmica, trigonometrica o dalla combinazione di queste, la cui soluzione non sia possibile per via algebrica.

La funzione in oggetto è della forma  $\bar{f}(x)=c$  oppure nella forma generale  $f(x)=\bar{f}(x)-c$ ; quindi in definitiva vogliamo risolvere l'equazione non lineare

$$f(x)=0 \quad \text{dove} \quad f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e si cercano gli } \alpha_i \in \mathbb{R} / f(\alpha_i)=0$$

A titolo di esempio alcune situazioni che si possono presentare sono quelle della fig. 1, in cui può anche venir meno l'esistenza o l'unicità della soluzione

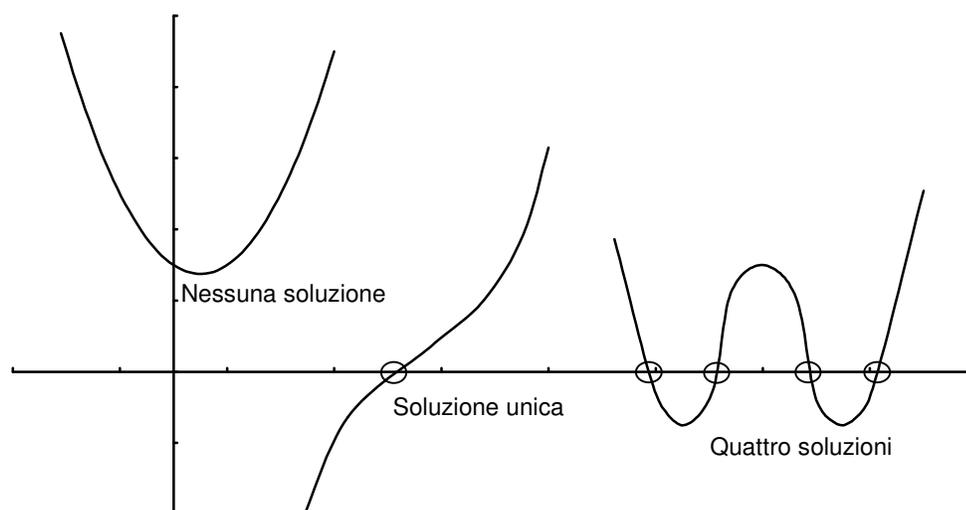


fig. 1

Il primo passo da fare è la separazione degli zeri che consiste nell'individuare gli intervalli  $[a_i, b_i]$  (vedi fig. 2) dell'asse x all'interno dei quali cade un'unica soluzione  $\alpha_i$ .

Se  $f(x)$  è una funzione continua in  $[a_i, b_i]$ , il Teorema degli zeri di una funzione continua assicura l'esistenza di almeno uno zero di  $f(x)$  in  $[a_i, b_i]$  nella sola ipotesi che  $f(x)$  assuma negli estremi  $a_i$  e  $b_i$  valori di segno opposto.

Perciò in questi casi, se non si è scelto opportunamente l'intervallo separatore può succedere che all'interno di esso possono cadere più di una soluzione ma in numero

dispari, se la funzione negli estremi  $a_i$  e  $b_i$  ha valori con lo stesso segno, gli zeri se esistono sono in numero pari. Invece se la funzione non taglia l'asse delle ascisse possiamo avere delle soluzioni coincidenti come ad esempio il caso di una parabola che ha il vertice sull'asse  $x$ .

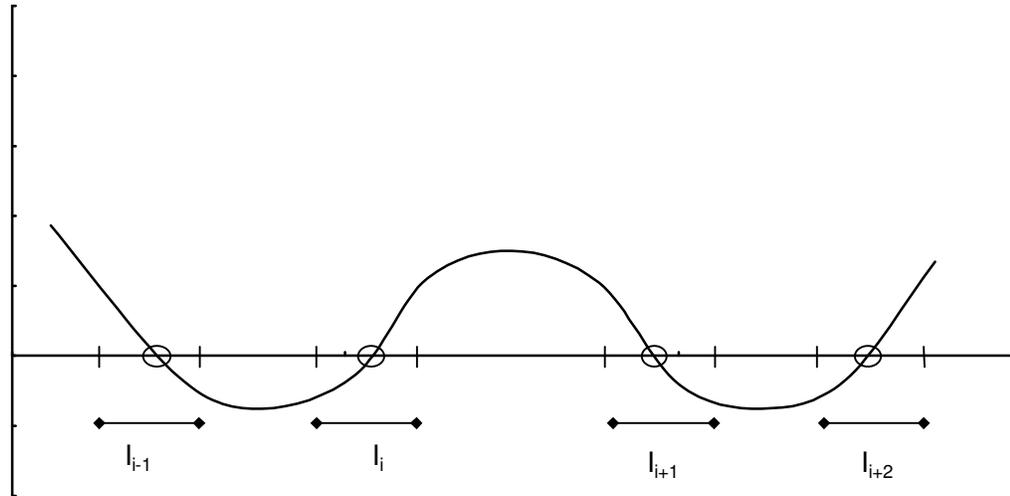


fig. 2

Non esistono tecniche standard per trovare questi intervalli, anche perché le funzioni possono essere di vario tipo. Per cui si procede in vari modi:

- Si può fare uno studio analitico approssimativo con gli strumenti dell'analisi matematica e quindi individuare dove la funzione attraversa l'asse delle  $x$ .
- Si tabula la funzione in un numero significativo di punti e si prendono come intervalli separatori  $[x_i, x_{i+1}]$  quelli dove la  $f(x)$  cambia di segno; il rischio è quello di individuare intervalli che contengano più di uno zero; ci sono casi in cui questo metodo non si può utilizzare come nel caso della funzione  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .
- Per funzioni che siano combinazioni lineari di funzioni più semplici da trattare, si può scomporre la funzione nella forma  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , dalla quale si intuisce subito che le soluzioni della funzione originale sono i punti di ascissa dove i grafici delle funzioni  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  si intersecano.

Esempi di queste funzioni sono:  $\sin 2x + x^2 - 3x$ ,  $\cos x^2 - \log \frac{x}{3}$ ;

$$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + e^x.$$

Funzione	scomposizione
$\sin 2x + x^2 - 3x$	$f_1(x) = \sin 2x$ $f_2(x) = -x^2 + 3x$
$\cos x^2 - \log \frac{x}{3}$	$f_1(x) = \cos x^2$ $f_2(x) = \log\left(\frac{x}{3}\right)$
$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + e^x$	$f_1(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ $f_2(x) = -e^x$

**Esempio 1** Supponiamo di separare gli zeri della  $f(x) = \sin(2x) + x^2 - 3x$ . In questo caso siccome la funzione è formata da due funzioni che conosciamo bene (vedi fig. 3) e sappiamo disegnare, conviene procedere con il terzo metodo. Disegniamo prima la funzione  $f_1(x) = \sin 2x$  e poi l'altra  $f_2(x) = -x^2 + 3x$ . Gli zeri della funzione completa si trovano dove le due curve che abbiamo separato si intersecano, per cui possiamo individuare i due intervalli separatori  $I_{\alpha_1} = [-0.5; 0.5]$  e  $I_{\alpha_2} = [2.7; 3.2]$ , intervalli in cui cade la soluzione.

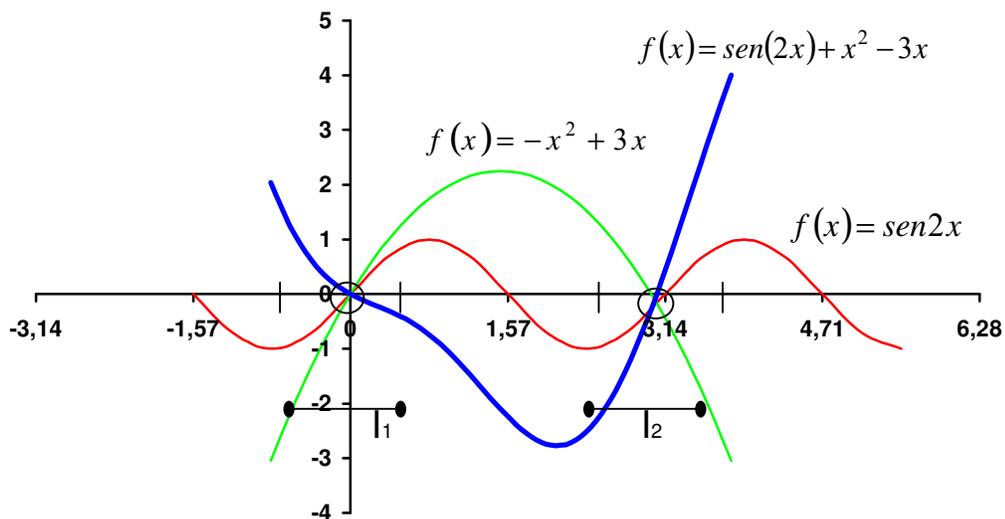


fig. 3

Le tecniche e spostate non sono alternative, ma possono essere usate contemporaneamente e in qualsiasi combinazione per individuare sempre con più precisione l'intervallo separatore.

### I METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE

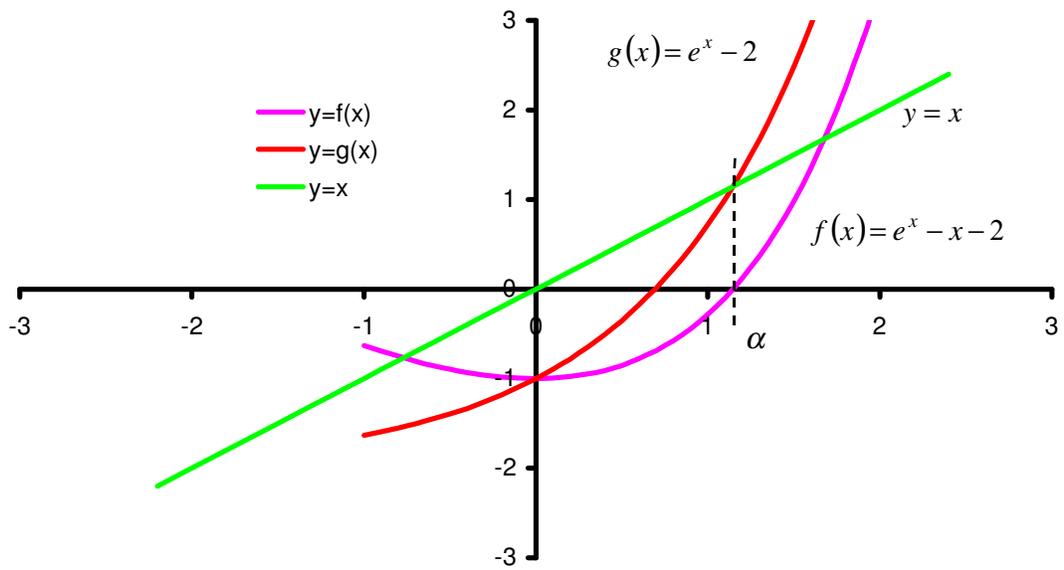


fig. 4

Data l'equazione  $f(x)=0$ , possiamo sempre scrivere  $f(x)=x-g(x)$  e quindi isolando la variabile  $x$  ottenere l'equazione  $x=g(x)$  da cui costruirci la formula iterativa

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots$$

Osserviamo che se le due funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono legate dalla relazione  $f(x)=x-g(x)$ , allora si ha

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$$

ovvero  $\alpha$  è uno zero di  $f$  se e solo se  $\alpha$  è un punto fisso dell'applicazione  $g$  (vedi fig. 4 nel caso della funzione  $f(x)=e^x-x-2$  e  $g(x)=e^x-2$ ). Per questo la ricerca degli zeri di una funzione  $f$  può essere ricondotto nella ricerca dei punti fissi della  $g$ .

Data una funzione  $f$  vi sono di varie possibili scelte di  $g$ . Ad esempio se  $f(x)=x^2-x-2$ , si può scegliere  $g(x)=x^2-2$ , oppure  $g(x)=1+\frac{2}{x}$ .

Una strategia naturale per l'approssimazione dei punti fissi di  $g$  è la seguente. Si parte da una stima della soluzione  $x_0$  e si costruisce la successione  $\{x_i\}$  dalla formula iterativa

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots$$

**Esempio 2** Consideriamo l'equazione  $f(x) = 4\cos(2x) + x^2 + x - 3$ . Da questa possiamo costruirci i seguenti due schemi:

1.  $x_{i+1} = 3 - 4\cos(2x_i) - x_i^2$  dove la  $g(x) = 3 - 4\cos(2x) - x^2$
2.  $x_{i+1} = \frac{4x_i \cos(2x_i) + x_i^3 + x_i^2}{3}$  dove la  $g(x) = \frac{4x \cos(2x) + x^3 + x^2}{3}$

L'equazione  $f(x) = 4\cos(2x) + x^2 + x - 3$  ammette quattro zeri  $\alpha_1 = -2,339$ ,  $\alpha_2 = -0,318$ ,  $\alpha_3 = 0,481$  e  $\alpha_4 = 1,964$  che possiamo separare rispettivamente tramite gli intervalli  $[-2,6; -2,2]$ ,  $[-0,7; -0,2]$ ,  $[0,3; 0,5]$  e  $[1,8; 2,2]$ . Adesso e seguendo le iterazioni degli schemi 1 e 2 con l'aiuto di un calcolatore o con un foglio di calcolo di EXCEL a partire dagli estremi dell'intervallo separatori otteniamo:

$$\alpha_1 = -2,339$$

Iterazione	Schema 1		Schema 2	
0	-2,600	-2,200	-2,600	-2,200
1	-5,634	-0,611	-5,230	-1,034
2	-29,819	1,258	-34,992	0,647
3	-882,208	4,659	-13903,988	0,466
4	-778288,752	-14,728	-895912592011,190	0,476
5	-605733381358,849	-212,395	<b>diverge</b>	0,480
6	<b>diverge</b>	-45105,311		<b>0,481</b>
7		-2034489105,858		
8		<b>diverge</b>		
9				

$$\alpha_2 = -0,318$$

Iterazione	Schema 1		Schema 2	
0	-0,700	-0,200	-0,600	-0,200
1	1,830	-0,724	-0,242	-0,235
2	3,125	1,987	-0,271	-0,265
3	-10,760	1,740	-0,292	-0,288
4	-109,220	3,747	-0,304	-0,302
5	-11926,515	-12,449	-0,311	-0,310
6	-142241747,742	-155,869	-0,315	-0,314
7	<b>diverge</b>	-24289,122	-0,317	-0,316
8		<b>diverge</b>	<b>-0,318</b>	-0,317
9				<b>-0,318</b>

$$\alpha_3 = 0,481$$

Iterazione	Schema 1		Schema 2	
0	0,300	0,500	0,300	0,500
1	-0,391	0,589	0,369	0,485
2	0,011	1,121	0,426	0,482
3	-0,999	4,230	0,460	<b>0,481</b>
4	3,660	-12,614	0,475	
5	-12,432	-160,098	0,479	
6	-155,400	-25632,405	<b>0,481</b>	
7	-24142,273	-657020209,454		
8	-582849360,906	<b>diverge</b>		
9	<b>diverge</b>			

$$\alpha_4 = 1,964$$

Iterazione	Schema 1		Schema 2	
0	1,800	2,200	1,800	2,200
1	3,347	-0,611	0,872	4,261
2	-11,870	1,258	0,274	28,322
3	-138,596	4,659	0,344	7877,953
4	-19208,879	-14,728	0,407	162994897202,371
5	-368981029,215	-212,395	0,451	<b>diverge</b>
6	<b>diverge</b>	-45105,311	0,471	
7		-2034489105,858	0,478	
8		<b>diverge</b>	0,480	
9			<b>0,481</b>	

Osservando i risultati ottenuti vediamo che con il 2° schema iterativo la successione degli  $x_i$  converge verso la soluzione dell'equazione sia partendo da destra che da sinistra della soluzione per  $\alpha_2 = -0,318$  e  $\alpha_3 = 0,481$ . Mentre con il primo schema la successione degli  $x_i$  diverge in tutti e quattro i casi e si allontana dalla soluzione.

Questo comportamento non è anomalo ma dipende fortemente dalle proprietà della funzione nell'intorno della soluzione  $\alpha$ . La convergenza dello schema iterativo si basa su alcune considerazioni di analisi matematica.

Se la successione  $\{x_i\}$  è convergente allora sicuramente  $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  è un punto fisso della  $g(x)$ .

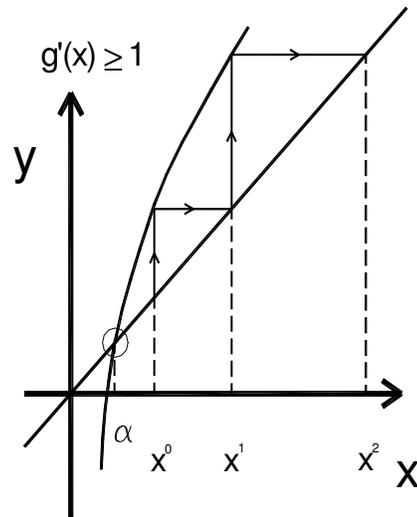
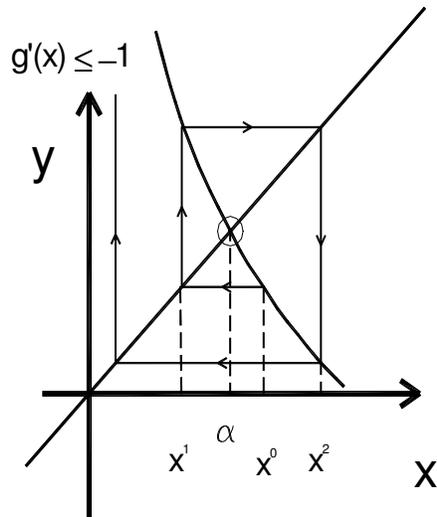
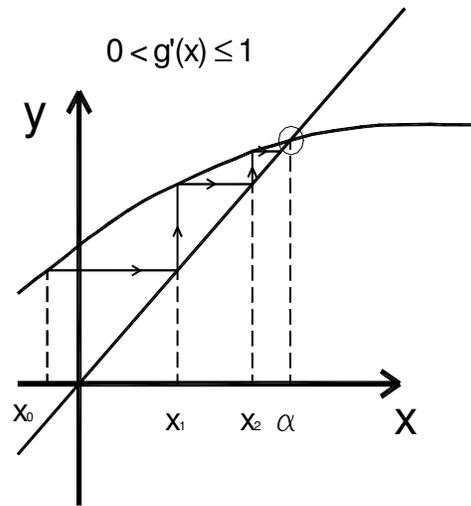
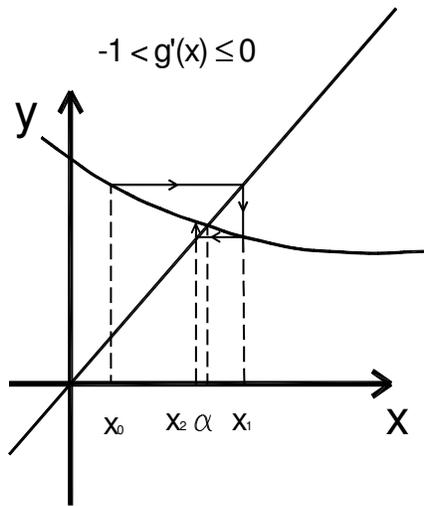
Supponiamo di sapere che  $\alpha$  è un punto fisso della  $g(x)$  continua e derivabile in un intervallo di  $\alpha$ ,  $I_\alpha = [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$  con  $\varepsilon > 0$ . Se  $|g'(x)| < 1$  allora per ogni scelta della soluzione iniziale  $x_0 \in I_\alpha$  si ha che  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \alpha$ ; inoltre  $\alpha$  è l'unico punto fisso di  $g(x)$  in  $I_\alpha$ .

Dimostriamolo:

Per il teorema di Lagrange

$$x_{i+1} - \alpha = g(x_i) - g(\alpha) = g'(\xi) \cdot (x_i - \alpha) \quad \text{con } \xi \in (x_i, \alpha)$$

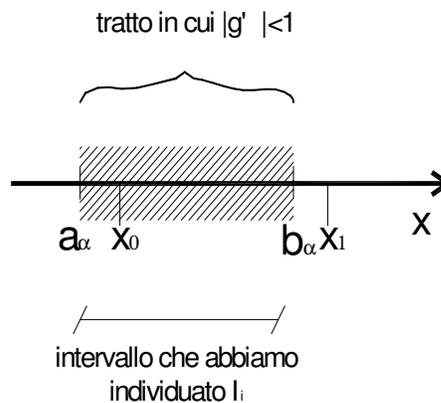
$|x_{i+1} - \alpha| = |g'(\xi)| \cdot |x_i - \alpha|$  ora essendo  $|g'(\xi)| < 1$  otteniamo che  $|x_{i+1} - \alpha| < |x_i - \alpha|$ , e tale relazione è valida per ogni  $i$ . Quindi possiamo stabilire che affinché il metodo sia applicabile deve essere  $|g'(x)| < 1$  nell'intorno dello zero della funzione.



Le situazioni possibili a livello locale sono quattro e il significato geometrico è mostrato nelle quattro figure riportate sopra.

A questo punto possiamo notare due “anomalie” nell’esempio 2 e nella relativa tabella dei valori delle iterate:

- l’intervallo separatore nel caso del secondo schema non è centrato sulla soluzione  $\alpha_3 = 0,418$ , nonostante questa successione converga verso lo zero della funzione, perché la positività di  $0 \leq g'(x) < 1$  nell’intorno  $\alpha_3$  con  $g'(x) = \frac{1}{3}(4\cos 2x - 8x\sin 2x + 3x^2 + 2x)$ , ci assicura della monotonia della successione  $\{x_i\}$  da qualunque estremo si parta non si uscirà mai dall’intervallo finendo in un punto di non convergenza.



La stessa cosa non si può dire se  $-1 < g'(x) \leq 0$ , in questo caso siccome la convergenza avviene in modo alternato può succedere che alla prima iterata  $x_1 = g(x_0)$  vada a finire fuori dell’intervallo di convergenza dove  $|g'(x)| < 1$  (vedi figura) e divergere dallo zero della funzione. In questo caso una volta determinato l’intervallo separatore  $[a, b]$  in cui è verificato che  $|g'(x)| < 1$ , si parte da  $x_0 = a$  e se  $x_1 \in [a, b]$  si procede normalmente, altrimenti si prende  $x_0 = b$  sicuri della convergenza. Infatti nel caso della soluzione  $\alpha_2 = -0,318$  partendo da sinistra il valore di  $g'(-0,5) = -0,484$ , nonostante il valore negativo della derivata prima in  $x_0 = -0,5$  vediamo che la iterata successiva è  $x_1 = -0,319$  che converge verso lo zero della funzione solo dopo poche iterate

- Inoltre si può notare che i valori della seconda colonna dello schema 2 divergono sia da  $\alpha_1 = -2,339$ , ma convergono verso l'altra soluzione  $\alpha_3 = 0,481$ . La stessa cosa succede con la prima colonna dello stesso schema che diverge dalla soluzione  $\alpha_4 = 1,964$ , ma converge sempre verso la soluzione  $\alpha_3 = 0,481$ . Per cui è possibile che le iterate vengano attratte da soluzioni diverse da quelle su cui si è posto l'attenzione. Non esistendo delle regole precise che permettano di anticipare queste situazioni, sta all'operatore stabilire la correttezza o meno della soluzione ottenuta.

Il problema della convergenza è di fondamentale importanza, anche se non va trascurato la velocità con la quale la successione delle iterate converge verso lo zero della funzione. Infatti ci sono funzioni  $g(x)$  per le quali  $g'(x) \approx 1$  in cui il metodo risulta inapplicabile proprio per la lentezza con la quale si arriva alla soluzione.

**Esempio 3** Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}$  dove  $g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{9}{2}$ .

Questa funzione ammette due soluzioni reali e coincidenti in  $\alpha = 3$ . La  $g'(x) = x - 2$  assume valori  $0 < g'(x) < 1$  in  $]2, 3[$  e poi  $g'(3) = 1$ . Quindi la successione  $\{x_i\}$  è monotona crescente e convergente per ogni  $x_i$  appartenente all'intervallo indicato. Partendo ad esempio da  $x_0 = 2,1$  ci costruiamo una tabella con l'aiuto di un programmino come ad esempio un foglio di calcolo di EXCEL e scopriamo che la successione converge, ma bisogna arrivare a 1990 iterate per ottenere una soluzione con un errore assoluto di  $10^{-3}$ .

i	$x_i$	i	$x_i$
0	2,1	204	.....
1	2,505	205	2,990573
2	2,627513	206	2,990617
3	2,696886	207	2,990661
4	.....	208	.....

Per cui possiamo definire l'ordine di convergenza la velocità (in parole povere: bontà di un metodo) con la quale la  $g(x)$  converge.

Sia  $\{x_i\}$  una successione convergente al valore  $\alpha$ , con  $x_i \neq \alpha$  per ogni indice  $i$ . Se esiste il

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|} = k \geq 0$$

diciamo che la successione ha convergenza superlineare se  $k = 0$ , lineare se  $0 < k < 1$ , e sublineare se  $k = 1$

Inoltre definiamo ordine di convergenza  $p$  della successione  $\{x_i\}$  che converge al valore  $\alpha$  il limite se esiste

$$0 < \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} = k < \infty$$

Nella definizione di ordine di convergenza  $k$  è un qualunque valore reale e finito non nullo. Questo valore viene chiamato *fattore asintotico di convergenza*, ed è ovvio che la successione converge tanto più velocemente quanto più piccolo è  $k$  e quanto più grande è  $p$ .

**Esempio 4** In questo esempio calcoliamo il valore  $k$  della funzione dell'esempio 3

$g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{9}{2}$ , ricordando che  $\alpha = 3$  e che abbiamo applicato il metodo nell'intervallo  $[2;3]$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - 3|}{|x_i - 3|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|g(x_i) - 3|}{|x_i - 3|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x_i^2}{2} - 2x_i + \frac{9}{2} - 3 \right|}{|x_i - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{2} \left[ \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} \right] = 1 \end{aligned}$$

quindi essendo  $k = 1$  possiamo concludere che la convergenza è sublineare.

**Esempio 5** Determiniamo l'ordine di convergenza e il fattore asintotico dello

schema iterativo  $x_{i+1} = \frac{4x_i \cos(2x_i) + x_i^3 + x_i^2}{3}$  dell'esempio 2 nell'intorno

della soluzione  $\alpha_3 = 0,481$ , per cui scriviamo

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha_3|}{|x_i - \alpha_3|^p} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|4x_i \cos(2x_i) + x_i^3 + x_i^2 - \alpha_3|}{3|x_i - \alpha_3|^p} = \lim_{x \rightarrow \alpha_3} \frac{|4x \cos(2x) + x^3 + x^2 - \alpha_3|}{3|x - \alpha_3|^p} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha_3} \frac{|4 \cos 2x - 8x \sin 2x + 3x^2 + 2x|}{3p|x - \alpha_3|^{p-1}} \end{aligned}$$

il cui limite risulta finito solo nel caso scegliamo  $p = 1$  e in tal caso il fattore

asintotico è  $k \approx 0,26$ . Se ci costruiamo i rapporti  $r_i = \frac{|x_i - \alpha_1|}{|x_{i+1} - \alpha_1|}$  sia a destra di

$\alpha_3 = 0,481$  che a sinistra otteniamo per ogni iterata dei valori praticamente uguali al valore  $k$  calcolato analiticamente.

Esaminiamo adesso i criteri di arresto, che consistono nel confrontare oggetti di tipo infinitesimo, cioè arrestare il processo di iterazione convergente ad un valore  $x_i$  della soluzione approssimata quando si raggiunge una certa soglia di tolleranza prefissata. Bisogna tener presente che qualsiasi metodo usiamo per la risoluzione di equazioni non lineari, non avremo mai soluzioni esatte.

Per ogni metodo è necessario prevedere un numero massimo di iterazioni consentite, in modo che l'esecuzione di un programma che implementa un metodo iterativo non impieghi eccessive risorse di calcolo nei casi di convergenza lenta e che la tolleranza non sia mai inferiore alla precisione di macchina;

1° criterio

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \tau_a \quad \text{errore incrementale assoluto}$$

sfruttando il valor medio e con qualche passaggio abbiamo

$$\begin{aligned} |x_{i+1} - x_i| &= (x_{i+1} - \alpha) - (x_i - \alpha) = (g(x_i) - \alpha) - (x_i - \alpha) = \\ &= g'(\xi) \cdot (x_i - \alpha) - (x_i - \alpha) = (g'(\xi) - 1) \cdot (x_i - \alpha) \end{aligned}$$

in un punto  $\xi \in \langle x_i, \alpha \rangle$  da cui ricaviamo

$$(x_i - \alpha) = \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|g'(\xi) - 1|} < \frac{\tau_a}{|g'(\xi) - 1|}$$

Il criterio è robusto per  $g'(\alpha) \leq 0$ , ma si indebolisce quando  $g'(\alpha)$  si avvicina ad 1.

2° criterio

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{x_{i+1}} \leq \tau_r \quad \text{con } x_{i+1} \neq 0 \quad \text{errore incrementale relativo}$$

anche qui sviluppando il numeratore e dividendo tutto per  $|\alpha|$  abbiamo

$$\frac{(x_i - \alpha)}{|\alpha|} = \frac{|x_{i+1}|}{|\alpha| \cdot |g'(\xi) - 1|} \approx \frac{\tau_a}{|g'(\xi) - 1|} \approx \frac{\tau_a}{|g'(x) - 1|}$$

3° criterio

$$|f(x_i)| \leq \tau_f \quad \text{errore assoluto sul valore della funzione}$$

ricordando che  $|\alpha|$  è uno zero della funzione e sfruttando ancora una volta il teorema del valor medio otteniamo

$$f(x_i) = f(x_i) - f(\alpha) = f'(\xi) \cdot (x_i - \alpha) \quad \text{con} \quad \xi \in \langle x_i, \alpha \rangle$$

$$\text{da cui} \quad (x_i - \alpha) = \frac{|f(x_i)|}{|f'(\xi)|} < \frac{\tau_f}{|f'(\xi)|}$$

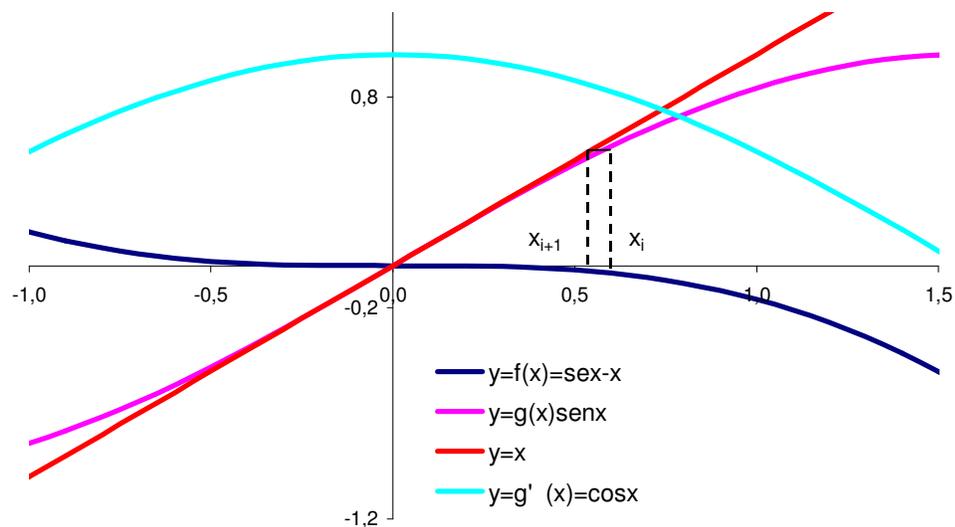
Questo metodo ci dice che è tanto più valido quanto più ripida è la funzione nell'intorno di  $\alpha$

4° criterio

*stabilizzazione delle cifre significative;*

questo criterio consiste nell'arrestare il processo di iterazione quando le prime  $n$  cifre significative di  $x_{i+1}$  e  $x_i$  coincidono; questo può essere fatto scrivendo i due valori in cifre in formato fisso e confrontando le stringhe di caratteri.

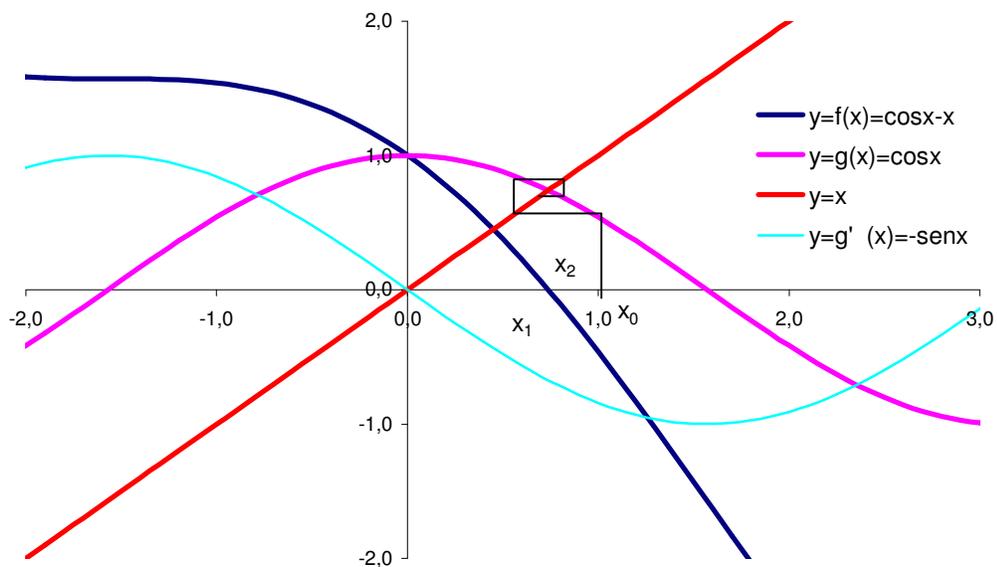
**Esempio 6** Per la funzione  $f(x) = \sin(x) - x$  possiamo scegliere  $g(x) = \sin x$  e quindi  $g'(x) = \cos x > 0$  in un intorno di  $\alpha = 0$ . Se usiamo come criterio di arresto l'errore incrementale assoluto con  $\tau_a = 10^{-5}$ , l'iterazione si arresta all'indice  $i = 1950$  partendo da  $x_0 = 1$  e si ha che  $x_i = 0,03915323\dots$  e  $x_{i+1} = 0,03914323\dots$ , mentre  $x_i - \alpha = x_i \approx -3,914 \cdot 10^{-2}$ . Questo è dovuto al fatto che quando  $x_i$  è vicino ad  $\alpha = 0$ ,  $g'(x) = \cos x$  è positiva e molto vicina ad 1. Dal grafico della figura vediamo chiaramente come la differenza  $x_i$  e  $x_{i+1}$  sia molto piccola pur essendo  $x_i$  lontana da  $\alpha = 0$ .



Osserviamo che in questo caso, imporre l'altra condizione di arresto e cioè *l'errore assoluto sul valore della funzione* è del tutto e equivalente a imporre la condizione appena vista, perché

$$f(x_i) = x_i - \sin x_i = x_i - x_{i+1}$$

Se invece consideriamo la funzione  $f(x) = \cos(x) - x$  scegliendo  $g(x) = \cos x$  e quindi  $g'(x) = -\sin x$ , abbiamo in un intorno di  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  che  $-1 < g'(x) < 0$ . Le iterate convergono per il segno negativo della derivata prima in modo alternato al valore  $\alpha = 0.739$



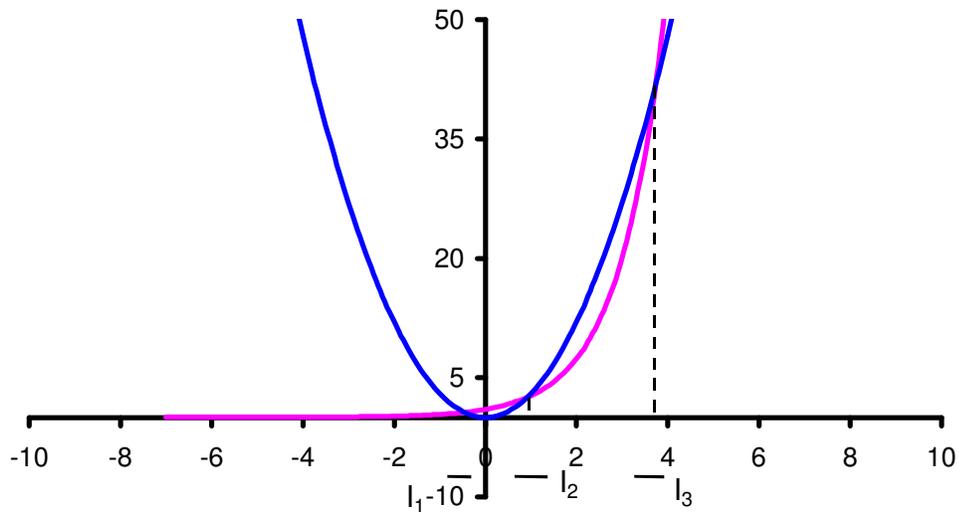
Se usiamo come criterio di arresto *l'errore incrementale assoluto* con  $\tau_a = 10^{-5}$ , l'iterazione si arresta all'indice  $i = 22$  e si ha che  $x_i = 0,7391301\dots$  e  $x_{i+1} = 0,7390548\dots$ , mentre  $|x_i - \alpha| \approx 4,504 \cdot 10^{-5}$

Per concludere possiamo dire che il costo computazionale, adottando i metodi di iterazione funzionale, dipende dal numero di operazioni richieste per il calcolo di  $g(x)$ , però non possiamo dire nulla della complessità finale del metodo perché non possiamo determinare a priori quante iterate servono per raggiungere la tolleranza stabilita.

### Esercizio

Supponiamo di voler trovare gli zeri dell'equazione  $3x^2 - e^x = 0$  e approssimare le soluzioni trovate con un errore assoluto  $\tau = 10^{-3}$ .

L'equazione  $f(x) = 3x^2 - e^x = 0$  possiamo scomporla nelle due funzioni note  $f_1(x) = 3x^2$  e  $f_2(x) = e^x$ . Gli zeri della funzione completa si trovano dove le due curve che abbiamo separatamente si intersecano, per cui dal grafico possiamo individuare i tre intervalli separatori  $I_{\alpha_1} = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ ,  $I_{\alpha_2} = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$  e  $I_{\alpha_3} = \left[\frac{7}{2}; 4\right]$  intervalli in cui cade la soluzione.



Dalla  $f(x) = 3x^2 - e^x$  possiamo costruirci i seguenti tre schemi:

1.  $x_{i+1} = \frac{e^{x_i}}{3x_i}$  dove la  $g(x) = \frac{e^x}{3x}$
2.  $x_{i+1} = \log(3x_i^2)$  dove la  $g(x) = \log(3x^2)$
3.  $x_{i+1} = \sqrt{\frac{e^{x_i}}{3}}$  dove la  $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{3}}$

A questo punto sfruttando i principi del teorema di Weierstrass analizziamo la convergenza nei singoli intervalli con i tre schemi proposti:

$$a. \quad g_1(x) = \frac{e^x}{3x}; \quad g_1'(x) = e^x \frac{x-1}{3x^2}; \quad g_1''(x) = e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{3x^2}$$

i.  $\forall x \in I_{\alpha_1}, g_1''(x) < 0$ ; poiché  $g_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,2\dots$  non è assicurata la convergenza del metodo in quanto come possiamo vedere non è verificata la condizione  $|g_1'(x)| < 1$

ii.  $\forall x \in I_{\alpha_2}, g_1''(x) > 0$ ; poiché  $g_1'\left(\frac{2}{3}\right) = -0,48\dots$   $g_1'(1) = 0$ , risulta  $-1 < g_1'(x) < 0$  per cui lo schema in questo intervallo è convergente in modo alternato per il segno nella  $g_1'$ . Con l'aiuto di una calcolatrice calcoliamo le iterate. Partendo da  $x_0 = 2/3$  otteniamo

Iterazione	Schema 3
0	2/3
1	0,97387
2	0,90641
3	0,91034
4	0,90998
5	0,91001

Poiché  $\alpha_2 \in [0,90998\dots; 0,91001\dots]$ , se si assume come soluzione approssimata  $\bar{\alpha}_2 = 0,910$ , allora sicuramente la differenza tra il valore approssimato trovato e la soluzione reale dell'equazione è più piccolo di  $10^{-3}$ .

iii.  $\forall x \in I_{\alpha_3}, g_1''(x) > 0$ ; poiché  $g_1'\left(\frac{7}{2}\right) = 2,2\dots$ , per cui essendo la derivata seconda positiva la derivata prima cresce, essendo non verificata la condizione  $|g_1'(x)| < 1$  non è assicurata la convergenza.

b. vediamo adesso che cosa succede con l'altro schema

$$g_2(x) = \log(3x^2); \quad g_2'(x) = \frac{2}{x}; \quad g_2''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

i. Poiché  $|g_2'(x)| \geq 1 \quad \forall x \in I_{\alpha_1}$  e  $\forall x \in I_{\alpha_2}$  lo schema proposto può non convergere

ii.  $\forall x \in I_{\alpha_3}, \quad g_2''(x) < 0; \quad \text{poiché} \quad g_2'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{7} \quad g_2'(4) = \frac{1}{2},$

$0 < g_1'(x) < 1$  e quindi lo schema converge. Per il segno positivo della derivata prima avremo una successione monotona crescente se partiamo dall'estremo sinistro dell'intervallo, mentre avremo una successione monotona decrescente se partiamo dall'estremo destro:

Iterazione	Schema 2	
	$x_i$	$x'_i$
0	3,500	4,000
1	3,60414...	3,87120...
2	3,66278...	3,80574...
...	.....	.....
6	3,72718...	3,73895...
7	3,72991...	3,73622...
8	3,73138...	3,73476...
9	3,73217...	3,73398...

Ora siccome  $\alpha_3 \in (x_9; x'_9)$ , se assumiamo  $\bar{\alpha}_3 = 3.733$ ,  $|\alpha_3 - \bar{\alpha}_3| < 10^{-3}$ .

c. adesso vediamo di trovare la soluzione mancante  $\alpha_1 \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$  con

l'ultimo schema

$g_1(x) = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}; \quad g_1'(x) = \pm \frac{\sqrt{3e^x}}{6}; \quad g_1''(x) = \pm \frac{\sqrt{3e^x}}{12};$  scegliamo

naturalmente il segno della radice concorde con il segno del punto fisso che intendiamo determinare.

$\forall x \in I_{\alpha_1}, \quad g_3''(x) < 0; \quad \text{poiché} \quad g_3'\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,22... \quad \text{e} \quad g_3'\left(-\frac{1}{3}\right) = -0,18...$

$-1 < g_1'(x) < 0$  per cui lo schema in questo intervallo è convergente in modo alternato per il segno negativo della  $g_3'$ . Con l'aiuto di una calcolatrice calcoliamo le iterate. Partendo da  $x_0 = -0,5$  otteniamo

Iterazione	Schema 3
0	-0,5
1	-0,44964...
2	-0,46111...
3	-0,45847...
4	-0,45908...
5	-0,45894...

Poiché  $\alpha_3 \in [-0,45908, \dots; -0,45894 \dots]$ , se si assume come soluzione approssimata  $\alpha_3 = -0,459$ , allora sicuramente la differenza tra il valore approssimato trovato e la soluzione reale dell'equazione è più piccolo di  $10^{-3}$ .



### **Bibliografia**

- Monetato Giovanni, “*Calcolo Numerico*”, Libreria Editrice Universitaria Leprotto e Bella, Torino, 1985
- Pica Angelo, “*Calcolo Numerico*”, Progetto Leonardo, Società Editrice Esculapio, Bologna, 1999
- Quarteroni Alfio, “*Elementi di Calcolo Numerico*”, Progetto Leonardo, Società