Funzioni

Chiamiamo **funzione** un insieme di coppie ordinate che goda della seguente proprietà: non possono appartenere alla stessa funzione due coppie ordinate che abbiano lo stesso primo elemento e diversi secondi elementi, tale proprietà è detta **univocità**.

Quindi una funzione è una **relazione univoca**: la funzione dipende dal primo elemento, se è una funzione ad una sola variabile (relazione binaria), oppure dai primi elementi se è a più variabili (relazione n-aria), perchè l'ultimo è univocamente determinato. Per esempio una relazione R ternaria, se è univoca è una funzione binaria, perché l'ultimo elemento è univocamente determinato.

Chiamiamo **variabile dipendente** il nome della quantità di un certo tipo che consideriamo assumere vari valori ciascuno univocamente determinato in corrispondenza di almeno uno tra i vari valori che può assumere una quantità di un altro tipo e **variabile indipendente** il nome della quantità dell'altro tipo.

Così l'insieme $\{(0,15),(2,14),(4,13),(6,13),(8,15),(12,19)\}$ è una funzione. Mediante una funzione intendiamo rappresentare le nostre informazioni sul legame esistente tra il variare di una quantità in funzione del variare di un'altra quantità, indipendentemente dal motivo per cui sono legate.

Poichè una funzione è una relazione, anche in questo caso un insieme che contiene i primi elementi delle coppie ordinate di una funzione è detto **primo insieme** della funzione, mentre un insieme che contiene i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono ad una funzione è detto **secondo insieme** della funzione.

Così se consideriamo la f che associa ad ogni marito la rispettiva moglie, l'insieme degli uomini può essere considerato come primo insieme, mentre l'insieme delle donne come secondo insieme.

In ogni caso una funzione è un sottinsieme del prodotto cartesiano del suo primo insieme per il suo secondo insieme. Notiamo che il primo insieme e il secondo insieme di una funzione non sono individuati dalla funzione stessa e possono essere scelti ad arbitrio purchè il primo insieme abbia tra i suoi elementi i primi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla funzione, e il secondo insieme abbia tra i suoi elementi i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla funzione. Essi aggiungono altre informazioni oltre quelle fornite dalla funzione

indicando l'ambito in cui si vuole considerare la funzione. Come per le relazioni, per indicare la scelta del primo insieme e del secondo insieme, oltre alla scelta della funzione, si utilizza la terna ordinata che raccoglie queste informazioni che è (A,B,*f*), e si usa dire che *f* e' una funzione da A in B, e si scrive anche *f*:A→B.
Come per le relazioni, dicesi **dominio** di una funzione l'insieme costituito da tutti gli elementi che hanno corrispondente nella funzione: cioè il dominio della funzione F, che si indica con dom(*f*), è {x: esiste y tale che (x,y) appartiene ad *f*} o in altra notazione si può dire che: dom(*f*) = {x: esiste y tale che *f*(x)=y}. Comunque venga scelto un primo insieme per la funzione, il dominio è un sottinsieme del primo insieme della funzione. Il concetto di dominio si può esprimere anche dicendo che il dominio è il sottinsieme degli elementi del primo insieme della funzione che hanno immagine.
Invece, dicesi **codominio** di una funzione l'insieme costituito da tutti gli elementi che corrispondono a qualcosa nella funzione, ovvero che sono immagine di qualche elemento nella funzione, ovvero la cui controimmagine non è vuota, cioe' il codominio della funzione F, che si indica con cod(*f*), è l'insieme {y: esiste x tale che (x,y) appartiene ad *f*}. Si noti che il codominio è l'immagine del dominio, e che il dominio e' la controimmagine del codominio. Nell'esempio precedente dei mariti e delle mogli, il codominio è costituito dall'insieme delle mogli, mentre le donne libere non appartengono al codominio. Comunque venga scelto un secondo insieme per la funzione, il codominio è un sottinsieme del secondo insieme della funzione.
Diamo alcuni esempi di funzione

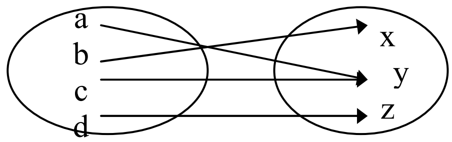
Esempio 1
La f assegni ad ogni numero reale il suo quadrato, si abbia cioè per ogni numero reale *x*, $f(x)=x^2$. Dominio e condominio sono i numeri reali, sicchè possiamo scrivere $f : R \to R$. L'immagine di –3 è 9; per cui possiamo scrivere $f(-3)=9$ oppure $f : -3 \to 9$.

Esempio 2

La *f* che associa ogni nazione la rispettiva capitale. Ora il dominio della *f* è l'insieme delle nazioni e il suo condominio quello delle capitali . L'immagine dell'Italia è Roma e cioè $f(Italia) = Roma$

Esempio 3

Sia A={a, b, c, d} e b={x, y, z} *f:A→B* sia definita dal diagramma



Definiamo che una funzione *f* da A in B è **totale** in A se il dominio D della funzione coincide con il primo insieme A. La totalità stabilisce un legame tra la funzione ed un suo primo insieme e non si riferisce solo alla funzione.

Una funzione *f* da A in B è **suriettiva** quando il suo condominio coincide con il secondo insieme B, in altre parole se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, la funzione *f* è una suriezione. Ad esempio, la funzione dell'esempio 1 non è suriettiva dal momento che nell'insieme immagine di R in F non vi sono i numeri negativi: nessun numero negativo è il quadrato di un numero reale.

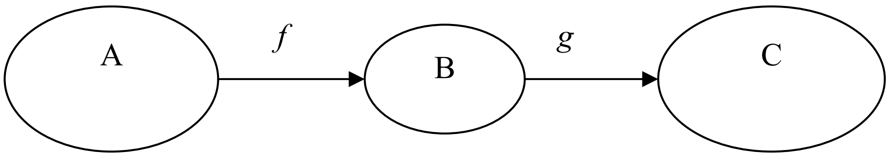
Una funzione F si dice **iniettiva** se elementi diversi di B sono associati elementi diversi di A, se non abbiamo nessun caso in cui due distinti elementi di A abbiano la stessa immagine. In breve *f* :A→B è iniettiva se $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$ o la stessa cosa $a \neq a'$ implica $f(a) \neq f(a')$.

Una funzione totale da A in B che sia anche iniettiva e suriettiva è detta **biunivoca** o **biettività**, oppure che c'è una corrispondenza **biunivoca** o una **biettività** tra A e B.

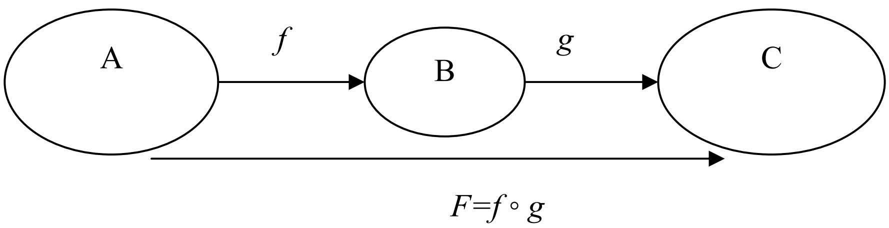
Attraverso le corrispondenze biunivoche si può determinare la numerosità di un insieme se ad ogni elemento di un insieme corrisponde uno ed uno solo elemento di un altro insieme, allora i due insiemi sono equinumerosi.

Composizioni di funzioni

Consideriamo due funzioni f da A in B, e g da B in C. La situazione è quella della figura sotto:



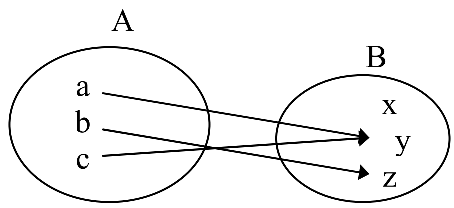
Allora la **funzione composta** F dalle funzioni f e g ordinatamente è l'insieme delle coppie ordinate (a,d) per cui esiste un elemento b tale che $(a,b) \in f$ e $(b,d) \in g$. Essa viene indicata con g(f) (si legge g di f) oppure con gf. In formule, $F=g(f)=gf=\{(x,y)$: esiste z tale che $(x,z) \in f$ e $(z,y) \in g\}$. Detto in un altro modo, la funzione composta g(f) delle funzioni f e g ordinatamente è la funzione che si ottiene facendo corrispondere ad un valore x della variabile indipendente della funzione f il valore y della variabile dipendente della funzione g determinato nel modo seguente: a x si associa il corrispondente valore z=f(x), se x appartiene al dominio di f, e poi si applica la funzione g al risultato z ottenuto, se questo appartiene al dominio di g, cioè si calcola y=g(f(x))=g(z), e questo y è il valore che corrisponde a x nella funzione composta. Usando la notazione y=F(x) per indicare la funzione F, ed analogamente z=f(x) per indicare la funzione f e y=g(z) per indicare la funzione g, per indicare che F è la funzione composta delle funzioni f e g possiamo anche scrivere: F(x)=g(f(x)).



Funzione inversa

Data una funzione iniettiva, chiamiamola F, possiamo considerare un'altra funzione, detta la **funzione inversa** della funzione F e che si indica con F^{-1}, che al valore *a* della sua variabile indipendente (che e' il valore *a* della variabile dipendente della funzione F) associa il valore b della sua variabile dipendente se *b* è il valore della variabile indipendente la cui immagine nella funzione F è *a*: cioe' F^{-1}={(a, b): (b, a) $\in$ F}. Ribadiamo che cio' ha senso solo se la funzione F è biettiva, altrimenti l'insieme {(a,b): (b,a) $\in$ F} è una relazione, ma non è una funzione poichè non soddisfa la proprietà caratteristica delle funzioni: l'unicità dell'elemento corrispondente ad un valore della variabile indipendente.

Esempio 4 La funzione f:A→B sia definita dal diagramma



Poiché $f(a)=y$ e $f(c)=y$, la funzione non è iniettiva. Non esiste così la funzione f^{-1}.

Esempio 5 La funzione $f : R \to R$ sia definita da $f(x)=x^3$. La funzione f è iniettiva; dunque esiste la $f^{-1} : R \to R$. In effetti possiamo definire la funzione inversa $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.