APPROSSIMAZIONI DI FUNZIONI

ED

INTERPOLAZIONE DI DATI

MEDIANTE POLINOMI DI LAGRANGE

Approssimazioni di funzioni mediante interpolazione polinomiale di Lagrange.

Supponiamo di voler risolvere il seguente problema:

Dato un gas in espansione all'interno di un cilindro in presenza di un pistone mobile, valutare l'andamento della pressione p del gas stesso (ad esempio in atmosfere) in funzione del volume v (ad esempio in m^3) occupato dallo stesso gas, dalla posizione di punto morto superiore in cui il volume è minimo (v_{min}), alla posizione di punto morto inferiore in cui il volume è massimo (v_{max}). Si ha a disposizione un sensore di pressione che rileva la pressione relativa $p_r=p-p_a$ (essendo p_a la pressione atmosferica) in corrispondenza di $n+1$ posizioni distinte del pistone corrispondenti a $n+1$ valori distinti del volume, compresi i valori v_{min} e v_{max}.

Ponendo $p=p_r+p_a$ (in particolare, utilizzando l'atmosfera come unità di misura per la pressione, si ha $p=p_r+1$), abbiamo a disposizione un insieme di $n+1$ coppie ordinate (v_i, p_i).

Nel caso più generale, una funzione f che riproduca un fenomeno, a partire da un certo insieme di $n+1$ coppie aventi come primo elemento e secondo elemento rispettivamente il valore della variabile indipendente e il corrispondente valore rilevato della variabile dipendente $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,1,\ldots n}$, deve rispettare le suddette condizioni, dette anche condizioni di interpolazione:

$$f(x_i)=y_i \qquad \text{per i}=0, 1, \ldots n. \tag{1}$$

Non si è fatta nessuna ipotesi sui valori di x_i, detti nodi, ma soltanto che tali valori siano a due a due distinti. Infatti potrebbe essere $x_i<x_j$ con $i>j$, ma non $x_i=x_j$ se $i\neq j$, per l'univocità della funzione. Infatti potrebbe essere $x_i=x_j$ e $p_i\neq p_j$, mancando così la condizione di univocità della funzione.
Per prima cosa bisogna individuare il dominio della f, cioè l'intervallo d'interpolazione. Questo è dato da $[a, b]$, con $a=\min\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$, $b=\max\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$.
Tra le varie classi di funzioni che possiamo utilizzare per costruire la funzione interpolante f, la più utilizzata è quella dei polinomi algebrici di grado n:

$$P_n=\{p_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\} \qquad \text{con } a_0, a_1, \ldots a_n \in R.$$

Per determinare univocamente il polinomio interpolante f determiniamo un insieme di polinomi di forma elementare in grado di riprodurre (combinandoli opportunamente tra loro) qualsiasi elemento di P_n. Quest'insieme di polinomi, per semplicità, può essere così costituito: $\{1, x, x^2,\dots, x^n\}$. In questo modo ogni $p_n(x)$ sarà formato dalla sommatoria degli elementi $1, x, x^2,\dots, x^n$, ciascuno moltiplicato per il rispettivo coefficiente $a_0, a_1, \dots a_n$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Il polinomio interpolante f, dovendo rispettare le condizioni d'interpolazione (1), darà luogo al seguente sistema di n+1 equazioni nelle n+1 incognite $a_0, a_1, \dots a_n$:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{gathered}$$

Il sistema precedente è equivalente al sistema lineare quadrato seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Tale sistema ammette unica soluzione, cioè i coefficienti $a_0, a_1, \dots a_n$ sono univocamente determinati. Infatti la matrice quadrata dei coefficienti, detta matrice di Vandermonde, ha determinante non nullo se e solo se gli x_i sono a due a due distinti tra di loro. Essendo la matrice non degenere (determinante non nullo) il sistema di partenza ammette soluzione unica; questo significa che per ogni n+1-upla di valori y_i è unica la n+1-upla dei coefficienti $a_0, a_1,\dots, a_n$, e quindi la funzione interpolante cercata.

Esempio 1: Determinare la funzione interpolante i dati seguenti relativi all'espansione isoterma di un gas (si ricordi che nell'espansione isoterma vale la legge $pv=c_0$, con c_0 costante), essendo p la variabile dipendente e v la variabile indipendente.

i	0	1	2
v_i	1	3	6
p_i	12	4	2

Soluzione: costruiamo il sistema lineare equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & v_0 & v_0^2 \\ 1 & v_1 & v_1^2 \\ 1 & v_2 & v_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mediante il metodo dell'eliminazione di Gauss riduciamo il sistema completo in forma triangolare superiore, in modo da ricavare i valori delle incognite mediante una sostituzione all'indietro (cioè ricavando prima a_2, poi a_1, ed infine a_0).

Nel primo passo utilizziamo come elemento perno il coefficiente a_{11}, ottenendo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 36 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_2 = a_{21} / a_{11} = 1 \\ a_{21} = a_{21} - q_2 a_{11} = 0 \\ a_{22} = a_{22} - q_2 a_{12} = 2 \\ a_{23} = a_{23} - q_2 a_{13} = 8 \\ a_{24} = a_{24} - q_2 a_{14} = -8 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & -8 \\ 1 & 6 & 36 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & -8 \\ 1 & 6 & 36 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_3 = a_{31} / a_{11} = 1 \\ a_{31} = a_{31} - q_3 a_{11} = 0 \\ a_{32} = a_{32} - q_3 a_{12} = 5 \\ a_{33} = a_{33} - q_3 a_{13} = 35 \\ a_{34} = a_{34} - q_3 a_{14} = -10 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & -8 \\ 0 & 5 & 35 & -10 \end{array}\right]$$

Nel secondo passo utilizziamo come elemento perno il coefficiente a_{22}, ottenendo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & (2) & 8 & -8 \\ 0 & 5 & 35 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_3 = a_{32} / a_{22} = 5/2 = 2{,}5 \\ a_{32} = a_{32} - q_3 a_{22} = 0 \\ a_{33} = a_{33} - q_3 a_{23} = 15 \\ a_{34} = a_{34} - q_3 a_{24} = 10 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{array}\right]$$

Adesso possiamo calcolare l'ultima incognita a_2, e per successive sostituzioni a_1 e a_0:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 12 \\ 2a_1 + 8a_2 = -8 \\ 15a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 12 - a_1 - a_2 \\ a_1 = \dfrac{-8 - 8a_2}{2} \\ a_2 = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 12 - \left(-\dfrac{20}{3}\right) - \dfrac{2}{3} \\ a_1 = -4 - 4 \times \dfrac{2}{3} = -\dfrac{20}{3} \\ a_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 18 \\ a_1 = -\dfrac{20}{3} \\ a_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

In conclusione abbiamo trovato $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 18 & -\dfrac{20}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}^T \to f(v) = 18 - \dfrac{20}{3} v + \dfrac{2}{3} v^2$.

Nei dati precedenti da interpolare si può notare che il prodotto pv è costante e vale 12 (infatti 12*1=4*3=2*6=12); quindi, ponendo c_0=12, la funzione da interpolare non è altro che un'approssimazione della funzione $p = \frac{12}{v}$.

Confrontiamo ad esempio i valori della funzione approssimante f (perché si conosce la funzione esatta) e della funzione $p(v)$ nei punti v=2 e v=4:

$f(2)=18-40/3+8/3=7{,}333$	$p(2)=6$	$E(2)=f(2)-p(2)=1{,}333$	$E_r(2)=\lvert E(2)/p(2)\rvert=22\%$
$f(4)=18-80/3+32/3=2$	$p(4)=3$	$E(4)=f(4)-p(4)=-1$	$E_r(4)=\lvert E(4)/p(4)\rvert=33\%$

Vediamo cosa succede fuori dall'intervallo d'interpolazione, ad esempio nei punti v=1/3 e v=8:

$f(1/3)=18-20/9+2/27=15{,}85$	$p(1/3)=36$	$E(1/3)=f(1/3)-p(1/3)=-20{,}15$	$E_r(1/3)=56\%$
$f(8)=18-160/3+128/3=7{,}333$	$p(8)=1{,}5$	$E(8)=f(8)-p(8)=5{,}833$	$E_r(8)= 389\%$

All'interno dell'intervallo d'interpolazione l'errore relativo anche se non trascurabile è pur sempre contenuto (33%). Quando estrapoliamo, cioè utilizziamo la funzione approssimante fuori dall'intervallo d'interpolazione, gli errori sia assoluti che relativi aumentano in maniera esagerata.

Al di là di quest'analisi proviamo a pensare quali operazioni dobbiamo svolgere se, sulla base delle stesse attrezzature, studiamo lo stesso fenomeno di espansione ma in presenza di una diversa temperatura, o addirittura in condizioni non isoterme (legge diversa dalla $pv=c_0$). In altre parole se consideriamo lo stesso insieme $\{v_i\}_{i=0,1,\ldots n}$ ma con diversi valori corrispondenti di pressione. Appare evidente che deve essere risolto nuovamente il sistema lineare (2) considerando il nuovo insieme di valori $\{p_i'\}_{i=0,1,\ldots n}$. Dobbiamo ripetere la stessa fatica fatta precedentemente anche se a cambiare è un solo elemento dell'insieme $\{p_i\}_{i=0,1,\ldots n}$.

In questi casi utilizziamo un metodo che ci permette di risparmiare parte del lavoro precedentemente svolto. Questo è possibile grazie ai polinomi fondamentali di Lagrange che hanno la proprietà di dipendere solamente dalla griglia di valori della variabile indipendente ($\{v_i\}_{i=0,1,\ldots n}$ nell'esempio precedente). Fissata la griglia di valori $x_0, x_1,\ldots,x_n$, tali polinomi sono di numero n+1 (pari al numero dei nodi x_i) e soddisfano le seguenti condizioni:

(3) $l_i(x_j)=1$ se i=j, $l_i(x_j)=0$ se i≠j, cioè si annulla in tutti i nodi escluso quello i-esimo dove vale 1.

Se costruiamo la funzione interpolante sommando tutti i prodotti $y_i \cdot l_i(x)$ tra il polinomio $l_i(x)$ relativo al nodo i-esimo e y_i, secondo elemento della coppia i-esima (x_i, y_j), questa soddisferà le condizioni d'interpolazione (1), per la proprietà (3) dei polinomi di Lagrange. Infatti, se:

(4) $$f^L{}_n(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\ldots+y_n l_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

è la funzione interpolante detta, allora segue:

$$f_n^L(x_0) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_0) = y_0 \cdot l_0(x_0) + y_1 \cdot l_1(x_0) + \ldots y_n \cdot l_n(x_0) = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + \ldots y_n \cdot 0 = y_0$$

$$f_n^L(x_1) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_1) = y_0 \cdot l_0(x_1) + y_1 \cdot l_1(x_1) + \ldots + y_n \cdot l_n(x_1) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + \ldots y_n \cdot 0 = y_1$$

…

$$f_n^L(x_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_n) = y_0 \cdot l_0(x_n) + y_1 \cdot l_1(x_n) + \ldots y_n \cdot l_n(x_n) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \ldots y_n \cdot 1 = y_n$$

In generale:

$$f_n^L(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_j) = y_0 \cdot l_0(x_j) + \ldots + y_{j-1} \cdot l_{j-1}(x_j) + y_j \cdot l_j(x_j) + y_{j+1} \cdot l_{j+1}(x_j) + \ldots + y_n \cdot l_n(x_j) = y_j$$

La struttura dell'i-esimo polinomio fondamentale è la seguente:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Quando x ha lo stesso valore di un nodo $x_j \neq x_i$, si annulla un binomio del numeratore, quindi $l_i(x_j)=0$, mentre quando $x=x_i$ il numeratore coincide col denominatore, quindi $l_i(x_i)=1$.

Esempio 2: Determinare la funzione approssimante dell'esempio precedente utilizzando il metodo di Lagrange.

Soluzione: Costruiamo i polinomi fondamentali ponendo per semplicità $x_i=v_i$ e $y_i=p_i$:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)}=\frac{(x-3)(x-6)}{10}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)}=\frac{(x-1)(x-6)}{-6}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)}=\frac{(x-1)(x-3)}{15}$$

Infine calcoliamo i valori della funzione approssimante nei punti x=2 e x=4:

$l_0(2)$=(2-3)(2-6)/10=2/5 $l_1(2)$=(2-1)(2-6)/(-6)=2/3 $l_2(2)$=(2-1)(2-3)/15=-1/15

$f^L{}_2(2)=y_0l_0(2)+y_1l_1(2)+y_2l_2(2)$=12*2/5+4*2/3+2*(-1/15)=4,8+2,667-0,133=7,334

$l_0(4)$=(4-3)(4-6)/10=-1/5 $l_1(4)$=(4-1)(4-6)/(-6)=1 $l_2(4)$=(4-1)(4-3)/15=1/5

$f^L{}_2(4)=y_0l_0(4)+y_1l_1(4)+y_2l_2(4)$=12*(-1/5)+4*1+2*1/5=-2,4+4+0,4=2

Abbiamo ritrovato esattamente gli stessi valori dell'esempio precedente. Per vedere i vantaggi del nuovo procedimento proviamo a calcolare i valori approssimati nei punti precedenti x=2 e x=4 partendo da una diversa serie di valori calcolati in corrispondenza degli stessi nodi x_i, cioè considerando una diversa legge di espansione del gas (es. $p=\frac{5}{\sqrt{v}}$), se ci si riferisce al fenomeno precedentemente visto:

i	0	1	2
x_i (=v_i)	1	3	6
y_i (=p_i)	5	2,887	2,041

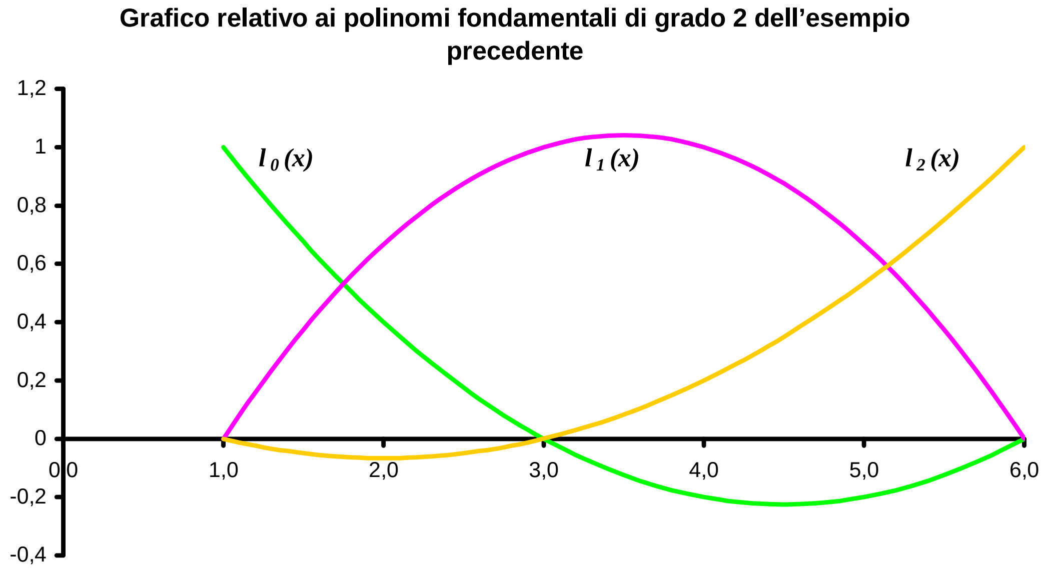
Avendo già calcolato i polinomi fondamentali in x=2 e x=4, si ha:

$f^L{}_2(2)=y_0l_0(2)+y_1l_1(2)+y_2l_2(2)$=5*2/5+2,887*2/3+2,041*(-1/15)=2+1,195-0,136=3,059

$E(2)=f^L{}_2(2)-5/\sqrt{2}$=-0,477 $E_r(2)=|E(2)/(5/\sqrt{2})|$= 13%

$f^L{}_2(4)=y_0l_0(4)+y_1l_1(4)+y_2l_2(4)$=5*(-1/5)+2,887*1+2,041*1/5=-1+2,887+0,408=2,295

$E(4)=f^L{}_2(4)-5/\sqrt{4}$=-0,205 $E_r(4)=|E(4)/(5/\sqrt{4})|$= 8,2%



Abbiamo visto come il grado massimo della funzione ottenuta (approssimante una funzione data o interpolante una serie di dati) dipende dal numero di coppie di dati utilizzati. Il grado massimo n è pari al numero di coppie meno uno. Infatti per due punti qualsiasi di diversa ascissa passa una retta obliqua (polinomio di primo grado in x, $y=a_0+a_1x$) o una retta parallela all'asse delle ascisse (polinomio di grado zero in x, $y=a_0$). Infatti, presa la coppia di punti $P_0\equiv(2,5)$ e $P_1\equiv(-3,8)$, cioè $x_0=2$, $x_1=-3$, $y_0=5$ e $y_1=8$, otteniamo il polinomio interpolante, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_2 = a_{21}/a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ a_{22} = a_{22} - q_2 a_{12} = -3 - 1\times 2 = -5 \\ a_{23} = a_{23} - q_2 a_{13} = 8 - 1 \times 5 = 3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5 - 2a_1 \\ a_1 = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{31}{5} \\ a_1 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

La funzione trovata sarà quindi: $y = \dfrac{31}{5} - \dfrac{3}{5}x$; che è appunto un polinomio di grado uno in x.

Se i due punti sono invece $P_0\equiv(2,5)$ e $P_1\equiv(-7,5)$, cioè $x_0=2$, $x_1=-7$, $y_0=5$ e $y_1=5$, otteniamo:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_2 = a_{21}/a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ a_{22} = a_{22} - q_2 a_{12} = -7 - 1\times 2 = -9 \\ a_{23} = a_{23} - q_2 a_{13} = 5 - 1 \times 5 = 0 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5 - 2a_1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

La funzione ottenuta è: $y = 5$; che è appunto un polinomio di grado nullo in x.

Per tre punti di diversa ascissa passa una sola parabola ad asse verticale se i tre punti non sono allineati (polinomio di secondo grado in *x*, vedi l'esempio di pagina 4÷5, che dava come risultato il polinomio $y = 18 - \frac{20}{3}x + \frac{2}{3}x^2$, sostituendo *v* con *x* e *f*(*v*) con *y*), una retta se i tre punti sono allineati (polinomio di primo grado in x se la retta è obliqua ($y=a_0+a_1x$), di grado zero se parallela all'asse *x* ($y=a_0$), cioè se i tre punti hanno stessa ordinata).

Vediamo il caso di tre punti allineati su una retta obliqua, ad es. i punti $P_0\equiv(2,-5)$, $P_1\equiv(-3,10)$ e $P_2\equiv(5,-14)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 25 & -14 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_2 = a_{21} / a_{11} = 1 \\ a_{21} = a_{21} - q_2 a_{11} = 0 \\ a_{22} = a_{22} - q_2 a_{12} = -5 \\ a_{23} = a_{23} - q_2 a_{13} = 5 \\ a_{24} = a_{24} - q_2 a_{14} = 15 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 8 & 15 \\ 1 & 5 & 25 & -14 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 8 & 15 \\ 1 & 5 & 25 & -14 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_3 = a_{31} / a_{11} = 1 \\ a_{31} = a_{31} - q_3 a_{11} = 0 \\ a_{32} = a_{32} - q_3 a_{12} = 3 \\ a_{33} = a_{33} - q_3 a_{13} = 21 \\ a_{34} = a_{34} - q_3 a_{14} = -9 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 8 & 15 \\ 0 & 3 & 21 & -9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & (-5) & 8 & 15 \\ 0 & 3 & 21 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} q_3 = a_{32} / a_{22} = -\frac{3}{5} \\ a_{32} = a_{32} - q_3 a_{22} = 0 \\ a_{33} = a_{33} - q_3 a_{13} = 21 + \frac{3}{5} \times 8 = \frac{129}{5} \\ a_{34} = a_{34} - q_3 a_{24} = -9 + \frac{3}{5} \times 15 = 0 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{129}{5} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -5 - 2a_1 = 1 \\ a_1 = -\frac{15}{5} = -3 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

La relativa funzione è: $y = 1 - 3x$; un polinomio di grado uno in *x*, cioè l'equazione di una retta obliqua.

Vogliamo vedere se c'è una stretta relazione tra il livello d'approssimazione della funzione ricavata e il numero di nodi della griglia, cioè la quantità dei dati iniziali. Intuitivamente dovremmo aspettarci un risultato migliore aumentando il numero di coppie (x_i, y_i). Sicuramente le singole funzioni l_i da calcolare aumenteranno sia di numero che di complessità. Ma questo lavoro in più non corrisponde in generale ad un vantaggio nell'approssimazione raggiunta, come mostriamo nell'esempio seguente:

Esempio 3: Determinare una nuova funzione approssimante dell'esempio 2 precedente, utilizzando il metodo di Lagrange e la stessa serie di dati estesa di una nuova coppia di dati (v_3, p_3).

i	0	1	2	3
v_i	1	3	6	0,5
p_i	12	4	2	24

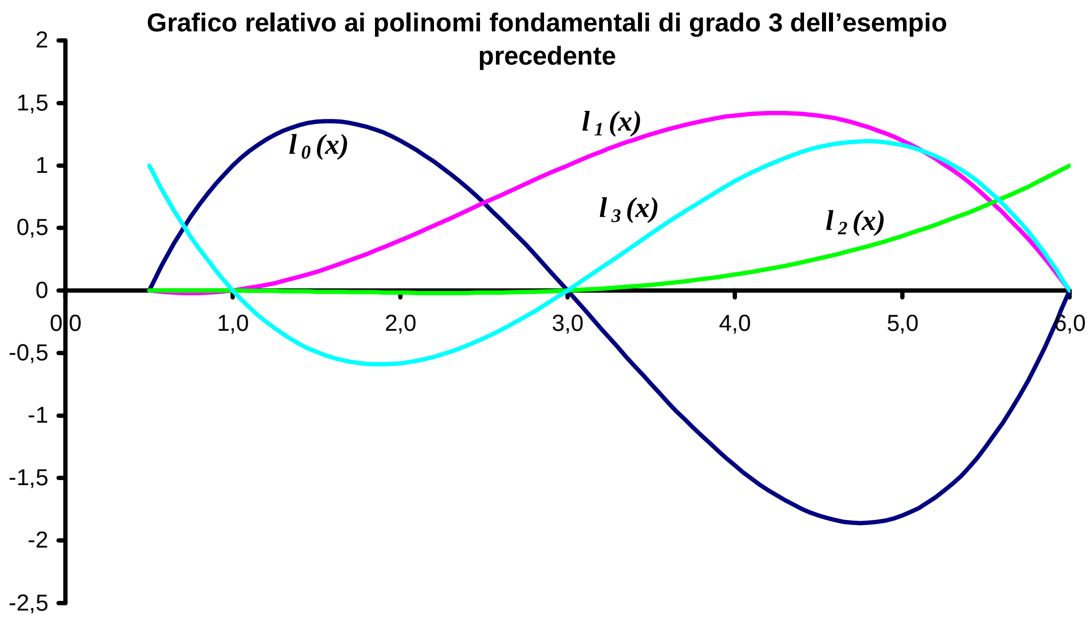
Soluzione: costruiamo i polinomi fondamentali ponendo per semplicità x_i=v_i e y_i=p_i:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-3)(x-6)(x-0{,}5)}{(1-3)(1-6)(1-0{,}5)}=\frac{(x-3)(x-6)(x-0{,}5)}{5}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-1)(x-6)(x-0{,}5)}{(3-1)(3-6)(3-0{,}5)}=\frac{(x-1)(x-6)(x-0{,}5)}{-15}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-0{,}5)}{(6-1)(6-3)(6-0{,}5)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-0{,}5)}{82{,}5}$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(0{,}5-1)(0{,}5-3)(0{,}5-6)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{-6{,}875}$$



Infine calcoliamo i valori della nuova funzione approssimante nei punti x=2 e x=4:

$l_0(2)$=1,2 $l_1(2)$=0,4 $l_2(2)$=-0,018 $l_3(2)$=-0,582

$f^L{}_3(2)=y_0l_0(2)+y_1l_1(2)+y_2l_2(2)+y_3l_3(2)$=12*1,2+4*0,4+2*(-0,018)+24*(-0,582)=2

$E(2)=f^L{}_3(2)$-12/2=-4 $E_r(2)=|E(2)/(12/2)|$= 67% (>22%)

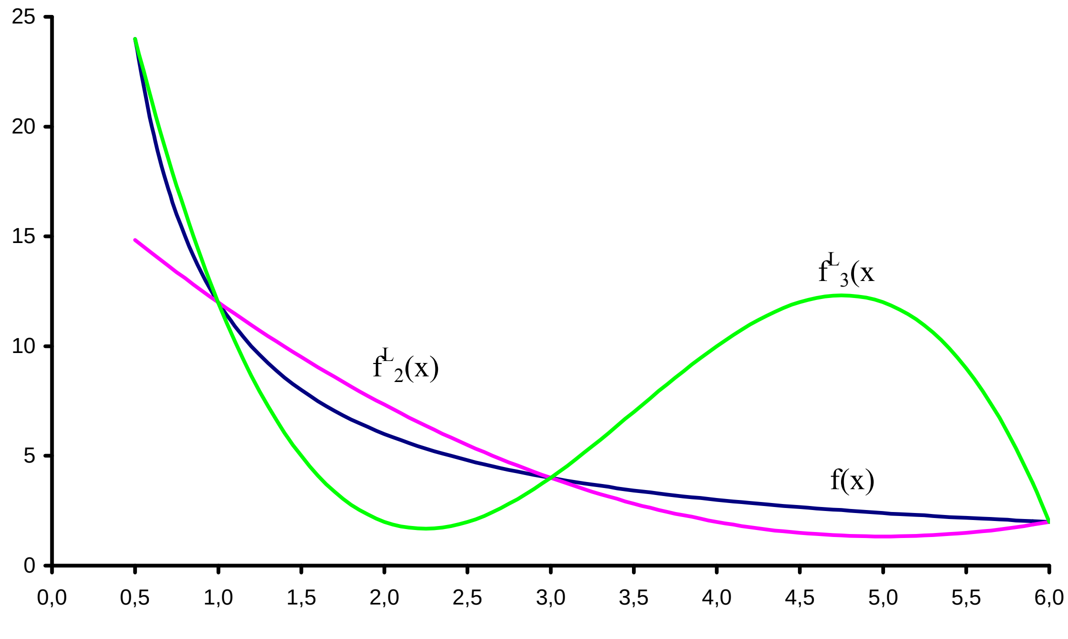
$l_0(4)$=-1,4 $l_1(4)$=1,4 $l_2(4)$=0,127 $l_3(4)$=0,873

$f^L{}_3(4)=y_0l_0(4)+y_1l_1(4)+y_2l_2(4)+y_3l_3(4)$=12*(-1,4)+4*1,4+2*0,127+24*0,873=10

$E(4)=f^L{}_3(4)$-12/4=7 $E_r(4)=|E(4)/(12/4)|$= 233% (>33%)

Dal grafico seguente possiamo notare una migliore approssimazione nel tratto da x=0,5 a x=1, cioè nell'intervallo $[x_3, x_0]$, utilizzando la nuova funzione approssimante $f^L{}_3(x)$. In tutto l'intervallo relativo alla precedente funzione $f^L{}_2(x)$, coincidente con l'intersezione degli intervalli d'interpolazione di $f^L{}_2(x)$ e $f^L{}_3(x)$, gli errori della nuova funzione $f^L{}_3(x)$ sono nettamente superiori della prima. In particolare nel punto x=2 l'errore relativo è triplicato in valore assoluto (dal 22% al 67%); mentre nel punto x=4 l'errore relativo dovuto alla $f^L{}_3(x)$ è sette volte maggiore di quello provocato dalla $f^L{}_2(x)$ (dal 33% al 233%). Ciò dimostra quanto affermato precedentemente.

Confronto tra diversi polinomi interpolanti la stessa funzione f(x)



Il numero di nodi da utilizzare può essere suggerito dal tipo di andamento che sospettiamo abbia il fenomeno da studiare. Ad esempio, se stiamo studiando l'accelerazione di un grave in caduta libera o su un piano inclinato, possiamo supporre un andamento parabolico dello spostamento in funzione del tempo; se stiamo studiando la potenza resa da un autoveicolo che percorre un tratto in pianura, possiamo supporre un andamento cubico della potenza stessa in funzione della velocità; e così via. Nell'esempio precedente il fenomeno da studiare aveva un andamento iperbolico, difficilmente approssimabile con funzioni polinomiali.

Non abbiamo specificato nulla sulla soglia di errore massimo della funzione interpolante i dati, quando si conosce la funzione analitica esatta del fenomeno che stiamo studiando, e quindi siamo in grado di valutare gli errori di approssimazione. Un criterio che potrebbe essere utilizzato per constatare la bontà della funzione trovata, è quello di verificare che l'errore massimo abbia lo stesso ordine di grandezza dell'errore massimo contenuto nei dati rilevati del fenomeno in studio. Questo lo si conosce se si conosce la classe di precisione della strumentazione utilizzata (negli esempi precedenti i sensori di pressione nella camera di combustione e di posizione del pistone). Ad esempio, se la pressione viene misurata con sensori che possono commettere errori massimi relativi del 10%, basta verificare che la funzione approssimante si discosti da quella teorica mediamente dello stesso ordine di grandezza dell'errore nei dati (per es. tollerando differenze relative fino al 20%). Questo perché l'errore globale commesso ha lo stesso ordine di grandezza del maggiore tra quello della strumentazione e quello della funzione approssimante. Se la funzione trovata non soddisfa questo criterio, possiamo utilizzare la funzione teorica esatta, se la si conosce.