Zeri di una funzione

Ricercare gli **zeri di una funzione** vuol dire ricavare quei valori della variabile x in cui la funzione vale 0

CALCOLO

Algebrico
cioè ricavare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$

Geometrico
cioè trovare le ascisse dei punti che hanno ordinata uguale a 0

La ricerca delle soluzioni avviene in due FASI:

- determinazione degli intervalli che contengono una ed una sola soluzione;
- ricerca, all'interno degli intervalli precedentemente determinati, della soluzione approssimata.

Prima Fase:
SEPARARE LE SOLUZIONI

$y = f(x)$
funzione **continua**
nell'intervallo **chiuso [a,b]**

- se $f(a) * f(b) = 0$
  - Almeno uno degli zeri della funzione è **uno degli estremi**
- se $f(a) * f(b) < 0$
  - Gli zeri sono in numero **dispari**
- se $f(a) * f(b) > 0$
  - Gli zeri, se esistono, sono in numero **pari**

Teoremi

In una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo chiuso $[a,b]$, se $f(a)*f(b) < 0$:

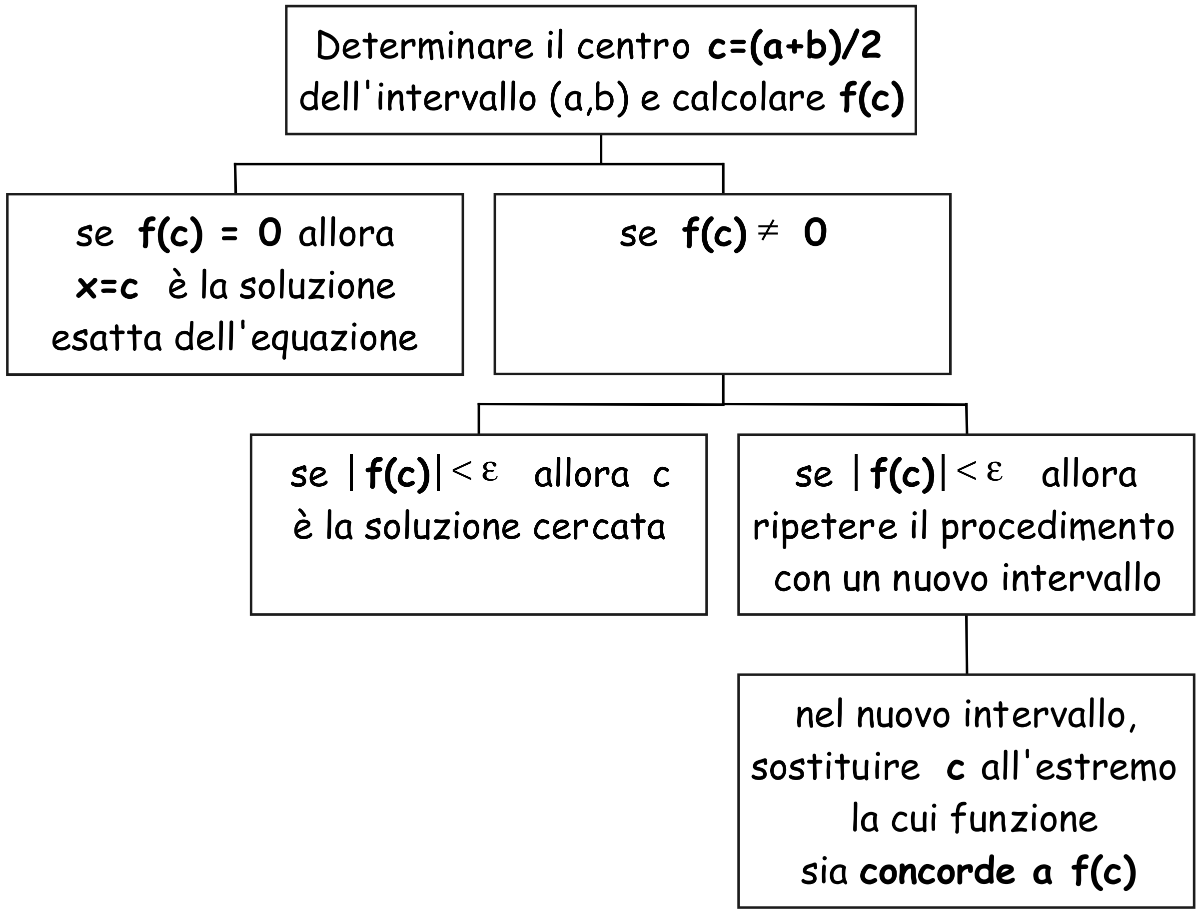
- allora esiste almeno un numero reale $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$ (**Teorema dell'esistenza degli zeri);**
- se la funzione è derivabile nei punti interni all'intervallo e se $f'(x) \neq 0$ nell'intervallo aperto (a,b), allora l'equazione $f(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo (a,b) (**Primo teorema di unicità della soluzione);**
- se la funzione è derivabile due volte nei punti interni all'intervallo e se $f''(x)$ è sempre positiva o sempre negativa nell'intervallo (a,b), allora l'equazione $f(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo (a,b) (**Secondo teorema di unicità della soluzione).**

Seconda Fase: METODI DI APPROSSIMAZIONE

La funzione $y = f(x)$, nell'intervallo $[a,b]$ dell'asse delle ascisse preso in esame, deve:

- avere **un solo zero**;
- assumere **valori opposti** agli estremi dell'intervallo;
- essere definita $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{[a,b]}$.

Metodo di bisezione (o dicotomico)



Metodo delle secanti (o delle corde)

Sostituire al grafico della funzione la **retta passante** per **A(a,f(a))** e **B(b,f(b))** con $\mathbf{x_1}$ appartenente all'asse x

Porre **y = 0** e calcolare $\mathbf{x_1}$

se $|\mathbf{f(x_1)}| < \varepsilon$ allora il procedimento ha termine e $\mathbf{x_1}$ è la soluzione della funzione

se $|\mathbf{f(x_1)}| > \varepsilon$ allora si assume come **nuovo punto A** quello di coordinate $\mathbf{(x_1, f(x_1))}$ e il procedimento si ripete fino a quando $|\mathbf{f(x_1)}| < \varepsilon$

Metodo delle tangenti (o di Newton-Fourier)

Tracciare per il punto **$A(a, f(a))$** la **tangente** t alla curva, con **x_1** appartenente all'asse x, e trovare la sua equazione

Porre **$y = 0$** e calcolare **x_1** e **$f(x_1)$**

se $|f(x_1)| < \varepsilon$ allora **x_1 è lo zero** della funzione e il procedimento ha termine

se $|f(x_1)| > \varepsilon$ allora si assume come nuovo estremo A il punto di coordinate **$(x_1, f(x_1))$** e si ripete il procedimento fino a che $|f(x_1)| < \varepsilon$